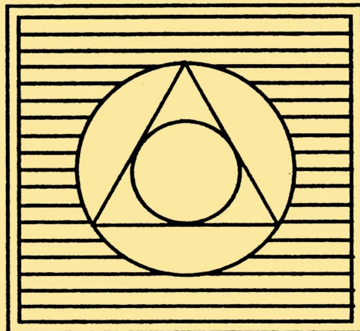
Vaidotas Mockus

GEOMETRIJOS ŽINYNAS

moksleiviams

Trumpa teorinė medžiaga ir
uždavinių sprendimo pavyzdžiai



Vaidotas Mockus

GEOMETRIJOS ŽINYNAS

moksleiviams

Trumpa teorinė medžiaga ir
uždavinių sprendimo pavyzdžiai

Šiauliai, 1996

UDK

Leidinio autorius - Vaidotas Mockus, Šiaulių pedagoginio instituto matematikos ir informatikos katedros dėstytojas.

Recenzentai - P. Grebeničenkaitė, Šiaulių miesto "Salduvės" vidurinės mokyklos mokytoja ekspertė,
R. Lukoševičius, Šiaulių pedagoginio instituto matematikos ir informatikos katedros docentas, matematikos mokslų daktaras.

ISBN 9986 - 38 - 010 - 30. Šiaulių pedagoginis institutas, 1996

Pratarmė

Pastaruoju metu vis dar jaučiamas informacijos pobūdžio matematikos leidinių trūkumas. Manau, kad šis skaitytojams siūlomas geometrijos žinynas iš dalies užpildys šią spragą, nes visada paranku turėti vienoje knygoje viso vidurinės mokyklos geometrijos kurso santrauką.

Leidinyje pateikiamos trumpos teorinės vidurinės mokyklos geometrijos kurso žinios , kurių taikymą praktikoje iliustruoja nemažai uždavinių su išsamiais jų sprendimo komentarais. Žinyno priede pateikiama geometrijos uždavinių, dažniausiai pasitaikančių stojamųjų į aukštąsias mokyklas matematikos egzaminų metu, tematika. Autorius nesiekė pateikti matematikos vadovėlio pakaitalą, nes žinyne beveik visi geometrijos teiginiai pateikti be įrodymų (apsiribota tik šių teiginių išsamiu paaiškinimu).

Geometrijos žinynas skirtas pirmiausia bendrojo lavinimo mokyklų moksleiviams, kurie visada jame ras reikiamą apibrėžimą, teoremą, formulę, geometrijos uždavinių sprendimo pavyzdžių. Manau, kad šis leidinys moksleiviams bus nepakeičiamas pagalbininkas savarankiškai sprendžiant geometrijos uždavinius, rengiantis laikyti baigiamąjį matematikos egzaminą vidurinėje mokykloje bei stojamuosius matematikos egzaminus į aukštąsias mokyklas.

Žinynu taip pat sėkmingai galės naudotis ir aukštųjų mokyklų (pirmiausia pedagoginių) studentai, norėdami pakartoti ir prisiminti vidurinėje mokykloje įgytas geometrijos žinias.

Autorius

Turinys

PLANIMETRIJA

STEREOMETRIJA

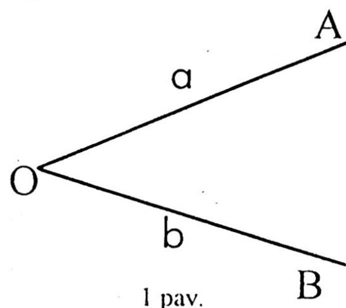
VEKTORIAI

KOORDINAČIŲ METODAS PLOKŠTUMOJE IR ERDVĖJE

PRIEDAI

PLANIMETRIJA

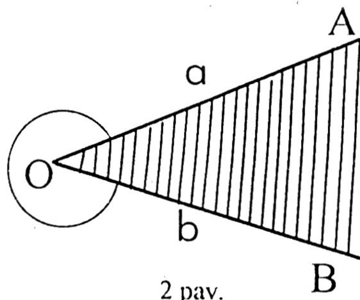
1.KAMPAI



1 pav.

Kampas yra figūra,kurią sudaro dvi skirtingos pustiesės,turinčios bendrą pradžios tašką (1 pav.).

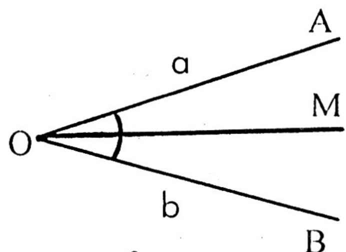
Tą tašką vadiname **kampo viršūne** , o pustieses - **kampo kraštinėmis.** Žymime : ∠AOB arba ∠(ab), arba ∠O ; O - kampo AOB viršūnė , OA ir OB (tiesės a ir b) - kampo AOB kraštinės.



2 pav.

Plokščiasis kampas yra plokštumos dalis,kurią riboja du iš vieno taško išeinantys ir nesutampantys spinduliai (2 pav.).

Yra du plokštieji kampai su duotosiomis kraštinėmis. Juos vadiname **papildomaisiais.** 2 paveiksle subrūkšniuotas plokščiasis kampas , kurio kraštinės a ir b .



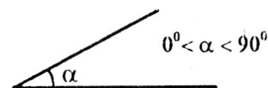
3 pav.

Kampo pusiaukampinė - spindulys, kuris išeina iš jo viršūnės,eina tarp jo kraštinių ir dalija kampą pusiau.

3 paveiksle spindulys OM yra kampo AOB pusiaukampinė.

SMAILUSIS KAMPAS

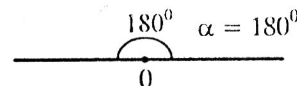
Kampą, mažesnį už 90^0, t.y. mažesnį už statųjį kampą, vadiname **smailiuoju** (4 pav.)



4 pav.

IŠTIESTINIS KAMPAS

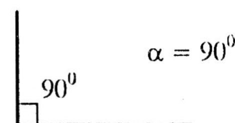
Kampas,kurio kraštinės yra papildomosios pustiesės , vadinamas **ištiestiniu** (5 pav.). Ištiestinio kampo laipsninis matas lygus 180^0.



5 pav.

STATUSIS KAMPAS

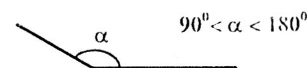
Kampą, lygų 90^0, vadiname **stačiuoju** kampu (6 pav.)



6 pav.

BUKASIS KAMPAS

Kampą, didesnį už 90^0, bet mažesnį už 180^0, t.y. didesnį už statųjį, bet mažesnį už ištiestinį kampą, vadiname bukuoju (7 pav.)



7 pav.

GRETUTINIAI KAMPAI

Gretutiniais vadiname du kampus,kurių viena kraštinė bendra,o kitos dvi yra papildomosios pustiesės.



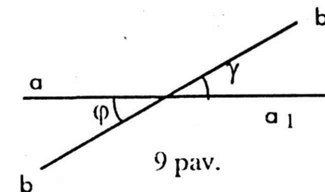
8 pav.

8 paveiksle pavaizduoti kampai α ir β yra gretutiniai. Gretutinių kampų suma lygi 180^0:

$$\alpha + \beta = 180^0$$

KRYŽMINIAI KAMPAI

Kryžminiais vadiname du kampus,kurių vieno kraštinės yra kito kraštinių papildomosios pustiesės.

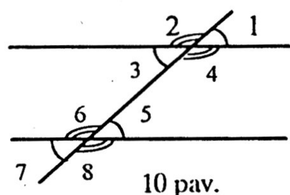


9 pav.

9 paveiksle pavaizduoti kampai (a b) ir (a_1 b_1) (kampai φ ir γ) yra kryžminiai. Kryžminiai kampai yra lygūs:

$$\varphi = \gamma$$

KAMPAI,GAUNAMI DVI LYGIAGREČIAS TIESES KERTANT TREČIĄJA TIESE

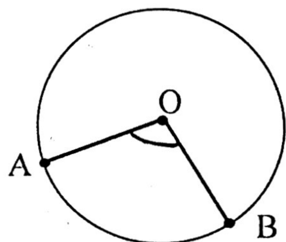


10 pav.

∠4 ir ∠5 bei ∠3 ir ∠6 – vidaus vienašaliai kampai;
∠4 ir ∠6 bei ∠3 ir ∠5 – vidaus priešiniai kampai;
∠1 ir ∠5, ∠2 ir ∠6, ∠4 ir ∠8, ∠3 ir ∠7 – atitinkamieji kampai;
∠1 ir ∠7 bei ∠2 ir ∠8 – išorės priešiniai kampai.

∠1 = ∠5 , ∠2 = ∠6 , ∠3 = ∠7 , ∠4 = ∠8 , ∠1 = ∠7 , ∠2 = ∠8 ;
∠3 + ∠6 = 180° ; ∠4 + ∠5 = 180° ; ∠1 + ∠8 = 180° ; ∠2 + ∠7 = 180° .

CENTRINIS KAMPAS.

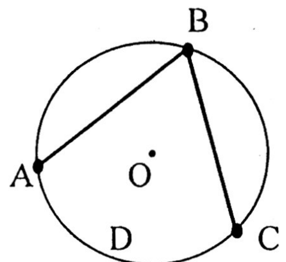


11 pav.

Iškilas kampas,kurio viršūnė yra apskritimo centras,o kraštinės kerta jį , vadinamas duotojo apskritimo **centriniu kampu.**

∠AOB - centrinis kampas,O - apskritimo centras (žr. 11 pav.).

ĮBRĖŽTINIAI KAMPAI

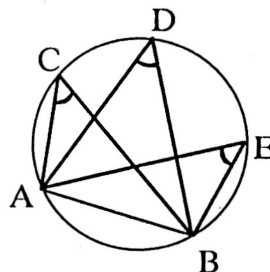


12 pav.

Iškilas kampas,kurio viršūnė priklauso apskritimui , o kraštinės kerta jį , vadinamas **įbrėžtiniu kampu.**

Įbrėžtinis kampas ∠ABC remiasi į lanką ADC,kuris yra įbrėžtiniame kampe (žr. 12 pav.).

Įbrėžtinių kampų savybės.

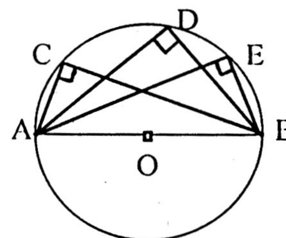


13 pav.

Visi įbrėžtiniai kampai,kurie remiasi į tą patį lanką $\overset{\frown}{AB}$ yra lygūs.

13 paveiksle pavaizduoti visi įbrėžtiniai kampai ACB, ADB ir AEB remiasi į lanką AB ir todėl yra lygūs:

$$\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$$

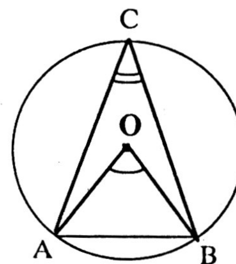


14 pav.

Visi įbrėžtiniai kampai,kurie remiasi į lanką , lygų pusei apskritimo , yra statūs,t.y.

14 paveiksle pavaizduoti visi įbrėžtiniai kampai ACB , ADB ir AEB remiasi į apskritimo skersmenį AB ir todėl yra statūs, t.y.

$$\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$$



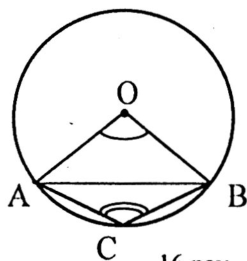
15 pav.

Jeigu ∠ACB - įbrėžtinis kampas ,o ∠AOB - centrinis kampas,be to , apskritimo centras O ir įbrėžtinio kampo ACB viršūnė C yra vienoje stygos AB pusėje, (žr. 15 pav.), tai

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB ,$$

t,y, įbrėžtinio kampo didumas lygus pusei jį atitinkančio centrinio kampo didumo.Kitais žodžiais tariant,įbrėžtinio kampo didumas lygus pusės lanko,į kurį jis remiasi , kampinio didumo , t.y.

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$



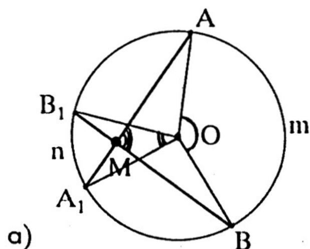
16 pav.

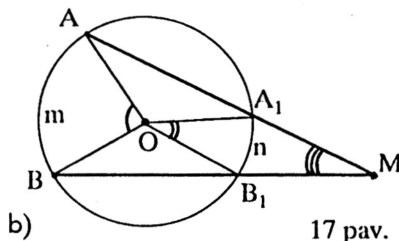
Jeigu apskritimo centras O ir įbrėžtinio kampo ACB viršūnė C yra skirtingose stygos AB pusėse (16 pav.),tai

$$\angle ACB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB$$

- **KAMPO , KURIO VIRŠŪNĖ YRA SKRITULIO VIDUJE, O KRAŠTINĖS KERTA APSKRITIMĄ , DIDUMAS (17 pav. a)**

KAMPO, KURĮ SUDARO DVI APSKRITIMO KIRSTINĖS, TURINČIOS BENDRĄ PRADŽIOS TAŠKĄ, DIDUMAS (17 pav. b).





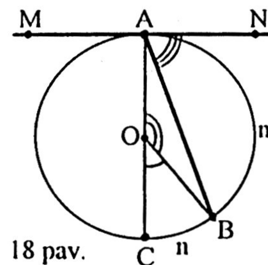
17 pav.

$$\angle AMB = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AmB} + \overset{\smile}{A_1nB_1}\right)$$
$$\angle AMB = \frac{1}{2}\left(\angle AOB + \angle A_1OB_1\right)$$
(17 pav. a)

$$\angle AMB = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AmB} - \overset{\smile}{A_1nB_1}\right)$$
$$\angle AMB = \frac{1}{2}\left(\angle AOB - \angle A_1OB_1\right)$$
(17 pav. b)

- **KAMPO , KURĮ SUDARO APSKRITIMO LIESTINĖ IR STYGA , EINANČIOS PER TĄ PATĮ BENDRĄ APSKRTIMO TAŠKĄ , DIDUMAS .**

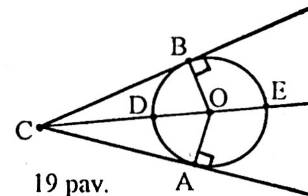
Kampo, kurį sudaro apskritimo liestinė MN ir styga AB (18 pav.), einančios per tą patį bendrą apskritimo tašką A, didumas lygus



18 pav.

$$\angle NAB = \frac{1}{2}(180^\circ - \overset{\smile}{BnC}) = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AmB}$$
arba
$$\angle NAB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BOC) = \frac{1}{2}\angle AOB$$

- **Į KAMPĄ ĮBRĖŽTAS APSKRITIMAS**



19 pav.

Jei apskritimas yra kampo ACB viduje ; BC ir AC - dvi apskritimo liestinės,išeinančios iš vieno taško C (žr. 19 pav.), tai

1)BC=AC

2)Tiesė CO dalo kampą ACB - pusiau,t.y. CO yra kampo ACB pusiaukampinė.

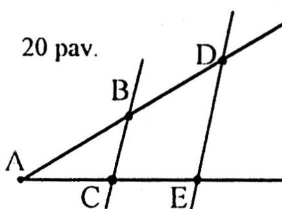
3)$OB\perp CB, OA\perp CA$, t.y. apskritimo spindulys statmenas apskritimo liestinei lietimosi taške.

4) $\angle ACB = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{BEA} - \overset{\smile}{BDA})$.

- **KAMPO KIRTIMAS LYGIAGREČIOMIS TIESĖMIS**

Atkarpos AB ir CD vadinamos **atkarpomis A_1B_1 ir C_1D_1 proporcingomis atkarpomis**,kai tų atkarpų ilgiai proporcingi,t.y. $AB:CD=A_1B_1:C_1D_1$

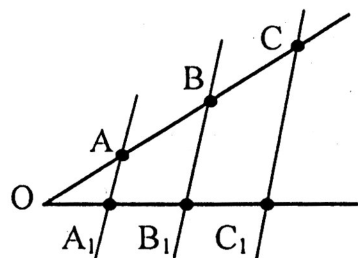
20 pav.



Teorema. Lygiagrečios tiesės , kertančios kampo kraštines , iškerta jose proporcingas atkarpas , t.y.

jei BC || DE , tai

$$AB : AD = AC : AE$$, (žr. 20 pav.)



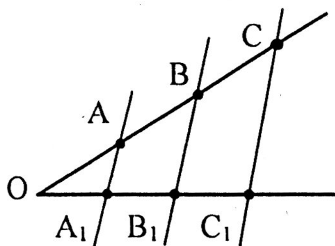
21 pav.

Jei kampą kerta trys viena kitai lygiagrečios tiesės AA_1 , BB_1 , CC_1 (žr. 21 pav.), tai teisingi sąryšiai:

$$\frac{OA}{OA_1}=\frac{OB}{OB_1}=\frac{OC}{OC_1};\quad \frac{OB}{OA}=\frac{OB_1}{OA_1}=\frac{BB_1}{AA_1};$$

$$\frac{OC}{OA}=\frac{OC_1}{OA_1}=\frac{CC_1}{AA_1};\quad \frac{OC}{OB}=\frac{OC_1}{OB_1}=\frac{CC_1}{BB_1};$$

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}.$$



22 pav.

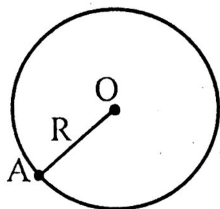
Talio teorema. Jei vienoje kampo kraštinėje nuosekliai atidėsime kelias lygias atkarpas ir per jų galus išvesime lygiagrečias tieses , kertančias kitą kampo kraštinę , tai jos toje kampo kraštinėje iškirs viena kitai lygiagrečias atkarpas ,

t.y. jei $OA_1=A_1B_1=B_1C_1$ ir $AA_1 || BB_1 || CC_1$,tai

$OA=AB=BC$ (žr. 22 pav.)

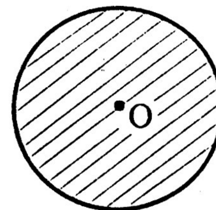
2.APSKRITIMAS IR SKRITULYS

• PAGRINDINĖS SĄVOKOS.



Apskritimas yra figūra,kurią sudaro visi plokštumos taškai, vienodai nutolę nuo duotojo plokštumos taško (23 pav.).

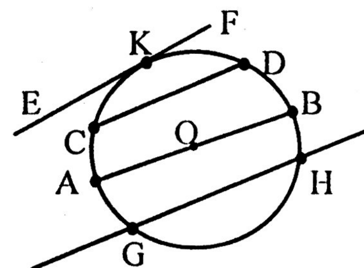
Tą tašką vadiname apskritimo **centru** (23 paveiksle taškas O). Atkarpą , jungiančią bet kurį apskritimo tašką A su jo centru,vadiname apskritimo **spinduliu.** 23 paveiksle $AO=R$ - apskritimo spindulys.



24 pav.

Skritulys yra figūra , kurią sudaro visi plokštumos taškai , nutolę nuo duoto plokštumos taško atstumu , ne didesniu už duotąjį (24 pav.).

Tą tašką vadiname skritulio **centru** , o duotąjį atstumą - **skritulio spinduliu.** Skritulio kraštas yra apskritimas .



25 pav.

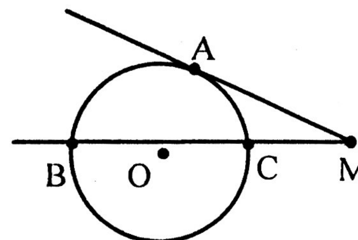
Apskritimo styga (CD) - atkarpa , jungianti du apskritimo taškus (25 pav.).

Apskritimo skersmuo (AB) - styga, einanti per apskritimo centrą (25 pav.).

Apskritimo kirstinė (GH) - tiesė, kertanti apskritimą dviejuose taškuose (25 pav.).

Apskritimo liestinė (EF) - tiesė , einanti per apskritimo tašką K ir statmena spinduliui, išvestam į tą tašką (25 pav.).

• APSKRITIMO KIRSTINĖS IR LIESTINĖS SĄRYŠIS

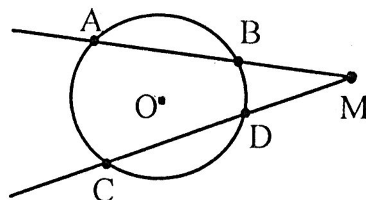


26 pav.

Jei MA ir MB - apskritimo liestinė ir kirstinė,išeinančios iš vieno taško M (26 pav.), tai

$$MA^2=MB\cdot MC$$

- **DVIEJŲ APSKRITIMO KIRSTINIŲ , IŠEINANČIŲ IŠ VIENO TAŠKO , SAVYBĖ**

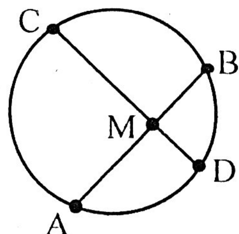


27 pav.

Jei MA ir MC - dvi apskrtimo kirstinės , išeinančios iš vieno taško M ir kertančios apskritimą taškuose B ir D (27 pav.), tai

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

- **SUSIKERTANČIŲ APSKRITIMO STYGŲ SĄVYBĖ**

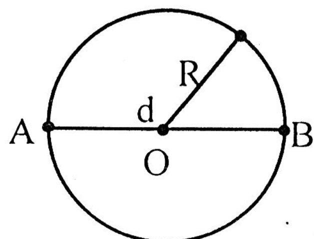


28 pav.

Jeigu AB ir CD - dvi apskritimo stygos, einančios per tą patį skritulio tašką M (28 pav.), tai

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

- **APSKRITIMO ILGIS**



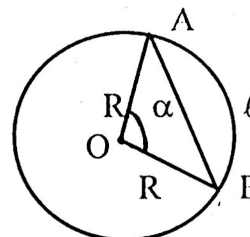
29 pav.

Apskritimo ilgis

$$c = 2\pi R = \pi d \;;$$

čia R - apskritimo spindulys, o d=AB - apskritimo skersmuo (29 pav.).

- **APSKRITIMO LANKO , ATITINKANČIO α^{O} CENTRINĮ KAMPĄ , ILGIS. STYGOS ILGIS.**



30 pav.

Jei R - apskritimo spindulys,AB - apskritimo styga, ℓ - apskritimo lanko , atitinkančio α^{o} centrinį kampą AOB ilgis (30 pav.), tai

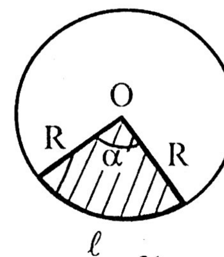
$$\ell = \frac{\pi R \alpha}{180},$$

$$AB = 2R\sin\alpha$$

- **APSKRITIMO LANKO , KURIO KAMPINIS DIDUMAS YRA β RADIANŲ , ILGIS .**

$$\ell = R\beta$$

- **SKRITULIO IŠPJOVOS , KURIOS LANKO LAIPSNINIS MATAS α^{O} , PLOTAS .**



31 pav.

$$S_{išp} = \frac{1}{2}R\ell = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

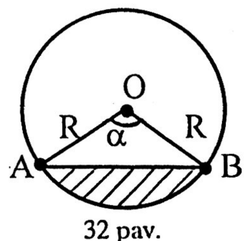
čia ℓ - išpjovos lanko ilgis ; R - apskritimo spindulys (31 pav.).

- **SKRITULIO IŠPJOVOS , KURIOS LANKO RADIANINIS MATAS YRA β RADIANŲ , PLOTAS .**

$$S_{išp.} = \frac{1}{2}R^2\beta$$

- **SKRITULIO NUOPJOVOS , NELYGIOS PUSSKRITULIUI , PLOTAS , KAI KAMPAS (α) IŠREIKŠTAS LAIPSNIAIS .**

1) $\alpha < 180^\circ$

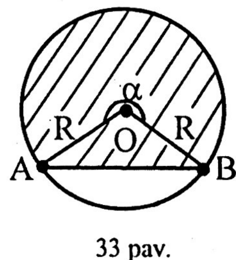


32 pav.

$$S_{nuop.} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - S_{\Delta AOB} \quad ;$$

čia α - centrinio kampo AOB , kuriame yra tos nuopjovos lankas , laipsninis matas , o $S_{\Delta AOB}$ - trikampio AOB plotas (32 pav.).

2) $\alpha > 180^\circ$ (33 pav.)



33 pav.

$$S_{nuop.} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} + S_{\Delta AOB}$$

Abiem atvejais $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha$. Atsižvelgę į tai , užrašysime skritulio nuopjovos ploto skaičiavimo formulę, kuri tinka abiem atvejais (universali formulė):

$$S_{nuop.} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right).$$

Jei kampas α didesnis už ištiestinį ($\alpha > 180^\circ$) , tai $\sin\alpha < 0$ ir gauname 2) atveją.

- **SKRITULIO NUOPJOVOS , KURIOS LANKO RADIANINIS MATAS YRA β RADIANŲ , PLOTAS .**

$$S_{nuop.} = \frac{R^2}{2}(\beta - \sin\beta)$$

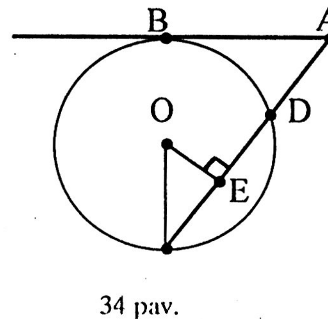
- **SKRITULIO PLOTAS**

$S = \pi R^2$; čia R - skritulio spindulys.

Išspręsime keletą temos “Apskritimas ir skritulys” uždavinių.

1 uždavinys. Iš taško A , esančio šalia apskritimo , išvesta liestinė ir kirstinė. Atstumas nuo A iki lietimosi taško 16 cm , o atstumas nuo A iki vieno iš susikirtimo su apskritimu taškų - 32 cm. Rasti apskritimo spindulį , jei atstumas nuo apskritimo centro iki kirstinės lygus 5 cm (34 pav.).

Sprendimas.



34 pav.

Pagal uždavinio sąlygą AB=16 , AC=32. Iš apskritimo centro O išvedame statmenį į kirstinę AC (34 pav.). Statmens ir kirstinės susikirtimo taškas yra E. Atkarpos OE ilgis yra kirstinės atstumas iki centro. Pagal sąlygą OE=5. Remiantis apskritimo liestinės ir kirstinės , išeinančiomis iš vieno taško , sąryšiu, turime :

$AB^2 = AD \cdot AC$, $16^2 = AD \cdot 32$, $AD=8$. Iš brėžinio matyti, kad CD=AC-AD=32-8=24. Ieškomasis spindulys yra atkarpos OC ilgis. Iš stataus trikampio COE, remiantis Pitagoro teorema, gauname

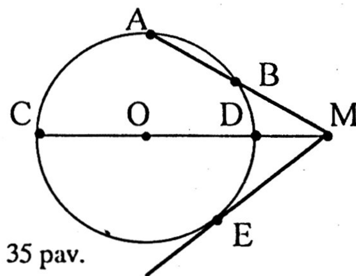
$OC^2 = CE^2 + OE^2$. Bet $CE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$.

Taigi $OC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, **OC=13**.

Atsakymas. 13.

2 uždavinys. Per tašką M, nutolusį nuo apskritimo centro atstumu b, išvesta kirstinė MA taip, kad susikirtimo su apskritimu taškas B ją dalo pusiau: MB=MA (žr. 35 pav.). Rasti kirstinės MA ilgį, jeigu apskritimo spindulys lygus r.

Sprendimas.



35 pav.

Per apskritimo centrą O ir tašką M išveskime kirstinę MC, kuri kerta apskritimą taškuose C ir D (35 pav.). Per tašką M išveskime apskritimo liestinę ME (E - apskritimo ir liestinės lietimosi taškas). Remiantis apskritimo liestinės ir kirstinės sąryšiu, gauname

$ME^2 = MA \cdot MB$ ir $ME^2 = MC \cdot MD$. Šių dviejų lygybių kairiosios pusės lygios, todėl turi būti lygios ir dešiniosios. Vadinasi, $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ (1).

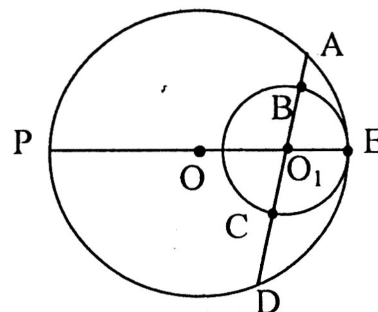
(1) lygybė išreiškia jau žinomą apskritimo kirstinių, išeinančių iš vieno taško savybę. Kadangi OC=OD=r, OM=b (pagal uždavinio sąlygą), tai MC=b+r ir MD=b-r. Pažymėkime MA=x. Tada $MB = \frac{x}{2}$. Įrašę gautąsias MC, MD, MA ir BM išraiškas į (1) lygybę, turime:

$x \cdot \frac{x}{2} = (b+r)(b-r)$. Iš čia $x = \sqrt{2(b^2 - r^2)}$.

Atsakymas. $\sqrt{2(b^2 - r^2)}$.

3 uždavinys. Du apskritimai liečiasi iš vidaus taške E (žr.brėžinį). Tiesė, einanti per mažesniojo apskritimo centrą O_1, kerta didesnįjį apskritimą taškuose A ir D, o mažesnįjį - taškuose B ir C. Rasti apskritimų spindulių santykį, jeigu AB : BC : CD = 2 : 4 : 3 (36 pav.).

Sprendimas.



36 pav.

Sakykime, R ir r - didesniojo ir mažesniojo apskritimų spinduliai atitinkamai. Tada BC=2r. Iš duotojo santykio randame:

$$AB = \frac{2r}{2} = r,\ CD = \frac{3}{2}r.$$

Per didžiojo apskritimo centrą O ir tašką E nubrėžkime skersmenį EP. Skersmuo išvestas į lietimosi tašką, statmenas apskritimo liestinei tame taške, todėl taškas O_1 yra skersmens PE taškas.

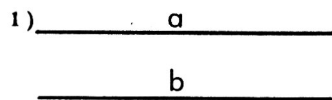
Remiantis susikertančių stygų sąvybe, gauname $O_1E \cdot O_1P = O_1A \cdot O_1D$. Iš šios lygybės, atsižvelgdami į tai, jog $O_1P=2R-r$, $O_1A=O_1B+BA=2r$ ir $O_1D=CD+CO_1=\frac{5}{2}r$, gauname $(2R-r)r=5r^2$, arba R=3r. Vadinasi, $\frac{R}{r} = 3$.

Atsakymas. 3.

3.TIESĖS PLOKŠTUMOJE

• TIESIŲ PADĖTIS PLOKŠTUMOJE.

1)

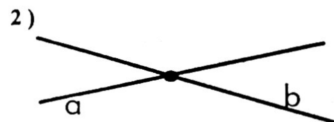


37 pav.

Dvi plokštumos tiesės a ir b yra **lygiagrečios** , jei jos neturi bendrų taškų , t.y. nesusikerta.

37 paveiksle pavaizduotos lygiagrečios tiesės a ir b.
Žymime : a || b .

2)

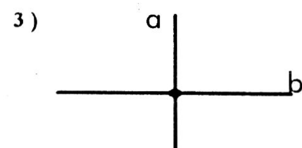


38 pav.

Dvi plokštumos tiesės a ir b yra **susikertančios** , jei jos turi vieną bendrą tašką .

38 paveiksle pavaizduotos susikertančios tiesės a ir b.

3)



39 pav.

Statmenos tiesės yra dvi tiesės, kurios susikerta stačiu kampu..

39 paveiksle pavaizduotos statmenos tiesės a ir b.
Žymime : $a \perp b$.

• PAGRINDINĖ LYGIAGREČIŲ TIESIŲ SAVYBĖ - LYGIAGRETUMO AKSIOMA.

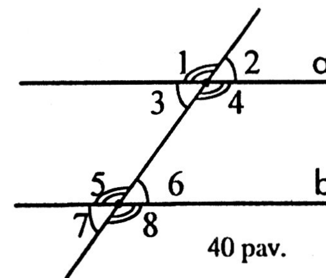
Plokštumoje per tašką , nepriklausantį duotai tiesei , galima nubrėžti ne daugiau kaip vieną tiesę , lygiagrečią tai tiesei .

• TIESIŲ LYGIAGRETUMO POŽYMIAI :

Yra šie **tiesių lygiagretumo požymiai** :

1) Dvi tiesės , lygiagrečios trečiai tiesei , yra lygiagrečios viena kitai.

2) Jei vidaus priešiniai kampai lygūs arba vidaus vienašalių kampų suma lygi 180° , tai tiesės lygiagrečios.



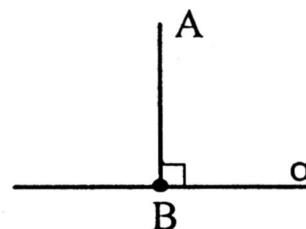
40 pav.

Vadinasi, jei tiesės a ir b yra lygiagrečios,
$\angle 3$ ir $\angle 6$ bei $\angle 4$ ir $\angle 5$ yra **vidaus priešiniai kampai, o**
$\angle 4$ ir $\angle 6$ bei $\angle 3$ ir $\angle 5$ yra **vidaus vienašaliai kampai** (40 pav.),
tai

$$\angle 3 = \angle 6 \text{ ir } \angle 4 = \angle 5 ,$$

$$\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ \text{ ir } \angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$$

• STATMUO DUOTAJAI TIESEI . ATSTUMAS NUO TAŠKO IKI TIESĖS.



41 pav.

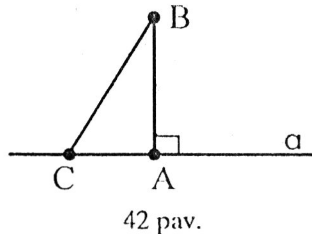
Statmuo duotajai tiesei yra jai statmenos tiesės atkarpa , kurios galas yra tų tiesių susikirtimo taškas .

Šį atkarpos galą vadiname **statmens pagrindu.** 41 paveiksle tiesė AB - statmuo tiesei a , B - statmens pagrindas.

Atstumas nuo taško iki tiesės yra statmens , nuleisto iš taško į tiesę , ilgis .

41 paveiksle atstumas nuo taško A iki tiesės a yra statmens AB ilgis.

STATMUO IR PASVIROJI.



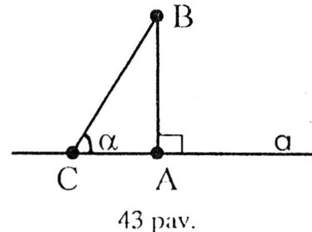
42 pav.

Jei BA - statmuo , nuleistas iš taško B į tiesę a (42 pav.),o C - bet kuris tiesės a taškas , nesutampantis su tašku A , tai atkarpa BC yra **pasviroji** , išvesta iš taško B į tiesę a . Taškas C yra **pasvirosios pagrindas** , o atkarpa AC - **pasvirosios projekcija** .

Teorema. Jei iš vieno taško išvesti statmuo ir pasviroji į tiesę a , tai atstumas nuo to taško iki statmens pagrindo mažesnis už atstumą nuo minėto taško iki pasvirosios pagrindo; kitaip sakant , statmens ilgis visada mažesnis už pasvirosios ilgį.

42 paveiksle : $BA < BC$.

PASVIROSIOS PROJEKCIJOS ILGIO RADIMAS , KAI ŽINOMAS PASVIROSIOS ILGIS IR KAMPAS TARP PASVIROSIOS IR TIESĖS.



43 pav.

Pasvirosios projekcijos ilgis lygus pasvirosios ilgio ir kosinuso kampo tarp pasvirosios ir jos projekcijos tiesėje sandaugai:

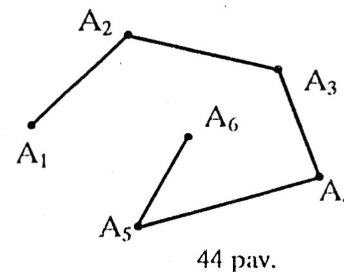
$$AC = BC \cdot \cos\alpha \quad ;$$

čia AC - pasvirosios BC projekcijos tiesėje a ilgis (43 pav.).

4.LAUŽTĖ

Laužtė $A_1A_2...A_n$ yra figūra , sudaryta iš taškų A_1 , A_2 , ... , A_n ir juos jungiančių atkarpų A_1A_2 , A_2A_3 , ... , $A_{n-1}A_n$.

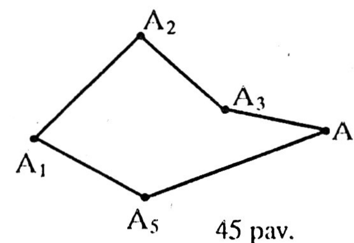
Taškai A_1 , A_2 , ... , A_n - **laužtės viršūnės** ,
atkarpos A_1A_2 , A_2A_3 , ... , $A_{n-1}A_n$ - **laužtės grandys** ,
taškai A_1 ir A_n (kai $A_n \neq A_1$) - **laužtės galai** .



44 pav.

Neuždaroji laužtė - laužtė , kurios galai nesutampa .

Laužtė $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ - neuždaroji laužtė (44 pav.).



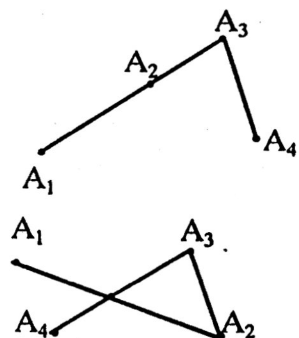
45 pav.

Uždaroji laužtė - laužtė , kurios galai sutampa .

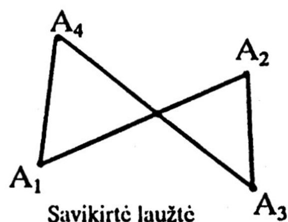
Laužtė $A_1A_2A_3A_4A_5$ - uždaroji laužtė (45 pav.).

Paprastoji laužtė - laužtė (neuždaroji arba uždaroji) , kurios gretimos grandys yra ne vienoje tiesėje , o negretimos grandys neturi bendrų taškų . Vadinasi , paprastoji laužtė neturi savikirtos taškų .

Laužtė $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ yra **paprastoji neuždaroji laužtė** , o laužtė $A_1A_2A_3A_4A_5$ - **paprastoji uždaroji laužtė**.



Savikirtė laužtė

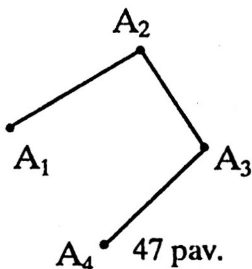


Savikirtė laužtė

46 pav.

46 paveiksle pavaizduotos laužtės nėra paprastos.

Laužtės ilgis - visų laužtės grandžių ilgių suma .



47 pav.

Teorema(laužtės ilgio teorema).
Laužtės ilgis yra didesnis už atstumą tarp jos galų.

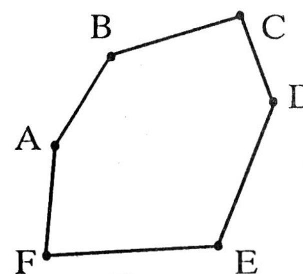
47 paveiksle pavaizduotai laužtei $A_1A_2A_3A_4$ turime :

$$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 > A_1A_4 .$$

5.IŠKILIEJI DAUGIAKAMPIAI

Daugiakampis yra paprastoji uždaroji laužtė , kurios gretimos grandys nėra vienoje tiesėje.

Daugiakampio viršūnėmis vadiname laužtės viršūnes , o **daugiakampio kraštinėmis** - laužtės grandis. Daugiakampį , turintį n viršūnių , o tuo pačiu ir n kraštinių , vadiname **n - kampiu .**

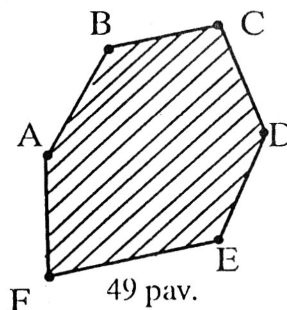


48 pav.

48 paveiksle pavaizduotas daugiakampis ABCDEF - paprastoji uždaroji laužtė, A,B,C,D,E,F - daugiakampio viršūnės, AB , BC , CD , DE , EF , FA - daugiakampio kraštinės - laužtės grandys . ABCDEF - šešiakampis.

Daugiakampio įstrižainės - atkarpos, jungiančios negretimas viršūnes .

Iškiliojo n-kampio įstrižainių skaičius lygus $\frac{n(n-3)}{2}$.



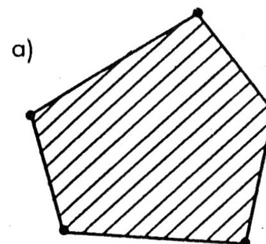
49 pav.

Plokščiasis daugiakampis , arba **daugiakampė sritis** - baigtinė plokštumos dalis , kurią riboja daugiakampis .

49 paveiksle pavaizduotas plokščiasis daugiakampis ABCDEF.
ABCDEF - plokščiasis šešiakampis.

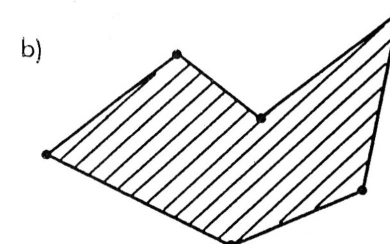
Iškiliuoju daugiakampiu vadiname daugiakampį , esantį vienoje pusplokštumėje nuo kiekvienos tiesės , kurioje yra jo kraštinė.

a)



Iškilasis daugiakampis

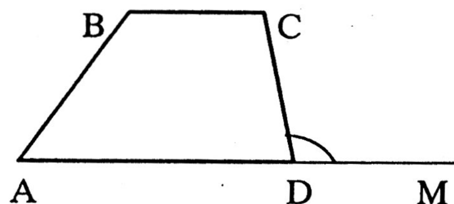
b)



Neiškilasis daugiakampis

50 pav.

Iškilojo daugiakampio priekampiu prie viršūnės vadiname kampą, gretutinį su daugiakampio kampu prie tos viršūnės.

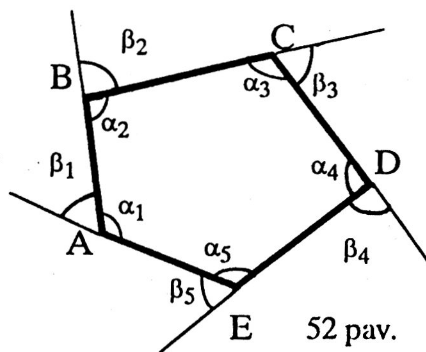


51 pav.

$\angle CDA$ - iškilojo daugiakampio ABCD kampas ; $\angle CDM$ - priekampis prie viršūnės D (51 pav.).

Teorema. Iškiliojo n-kampio kampų suma lygi $180^\circ(n-2)$.

Teorema. Iškiliojo n - kampio priekampių suma lygi 360° .



52 pav.

52 paveiksle pavaizduotas iškilasis penkiakampis ABCDE . α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 - penkiakampio kampai prie viršūnių A,B,C,D,E atitinkamai, o β_1 , β_2 , β_3 , β_4 , β_5 - penkiakampio priekampiai prie viršūnių A , B , C , D , E atitinkamai.

Turime:

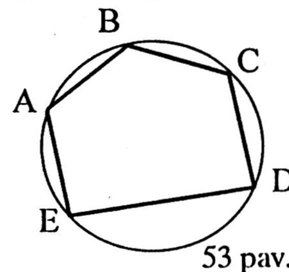
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = =180^\circ(5\text{-}2) = 180^\circ\cdot 3 = 540^\circ ;$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 360^\circ .$$

6.TAISYKLINGIEJI DAUGIAKAMPIAI

Taisyklinguoju daugiakampiu vadinamas iškilasis daugiakampis , kurio visos kraštinės lygios ir visi kampai lygūs.

Kiekvienas taisyklingojo n - kampio kampas lygus $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$, o jų suma lygi $180^\circ(n\text{-}2)$.

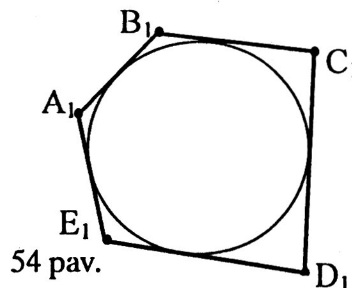


53 pav.

Įbrėžtu į apskritimą daugiakampiu (įbrėžtiniu daugiakampiu) vadiname daugiakampį , kurio visos viršūnės yra viename apskritime .

53 paveiksle pavaizduotas daugiakampis ABCDE yra įbrėžtinis .

Pats apskritimas šiuo atveju vadinamas **apibrėžtu apie daugiakampį apskritimu (apibrėžtiniu apskritimu)** .



54 pav.

Apibrėžtu apie apskritimą daugiakampiu (apibrėžtiniu daugiakampiu) vadiname daugiakampį , kurio visos kraštinės liečia vieną apskritimą .

54 paveiksle pavaizduotas daugiakampis $A_1B_1C_1D_1E_1$ yra apibrėžtinis .

Pats apskritimas šiuo atveju vadinamas **įbrėžtu į daugiakampį apskritimu (įbrėžtiniu apskritimu).**

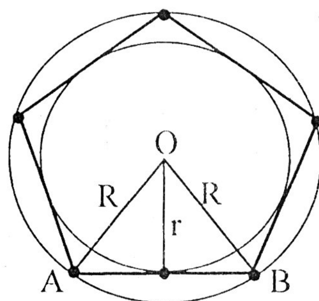
Kiekvienas taisyklingasis iškilasis daugiakampis yra įbrėžtinis ir apibrėžtinis daugiakampis , t.y. apie kiekvieną taisyklingąjį daugiakampį galima apibrėžti apskritimą ir į kiekvieną taisyklingąjį daugiakampį galima įbrėžti apskritimą.Apibrėžtojo ir įbrėžtojo apskritimų centrai yra taisyklingojo daugiakampio centre(,t.y. jie sutampa).

> Kiekvieno apibrėžtinio daugiakampio plotas lygus jo pusperimetrio ir įbrėžtinio apskritimo spindulio sandaugai .

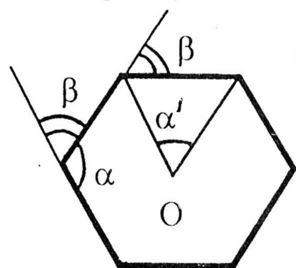
Taigi

$$\boxed{S=pr}\quad ;$$

čia p - daugiakampio pusperimetris , r - į daugiakampį įbrėžto apskritimo spindulys (55 pav.).



skritimo spindulys ;



55 pav.

Toliau žymėsime (55 pav.):

n - taisyklingojo n-kampio kraštinių skaičius ;

a_n - taisyklingojo n - kampio kraštinės ilgis ;

p - taisyklingojo n - kampio pusperimetris ;

R - apie taisyklingąjį daugiakampį (n-kampį) apibrėžto apskritimo spindulys ;

r - į taisyklingąjį daugiakampį įbrėžto apskritimo spindulys ;

S - taisyklingojo daugiakampio plotas;

α - taisyklingojo daugiakampio vidaus kampas ;

α' - taisyklingojo n - kampio centrinis kampas ;

β - taisyklingojo n - kampio priekampis.

Pagrindinės formulės:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$$

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a_n^2}$$

$$p = \frac{na_n}{2}$$

$$\alpha = \frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ$$

$$S = \frac{1}{2}R^2 n \sin\frac{360^\circ}{n}$$

$$\alpha' = \frac{360^\circ}{n}$$

$$S = p\cdot r = \frac{na_n r}{2}$$

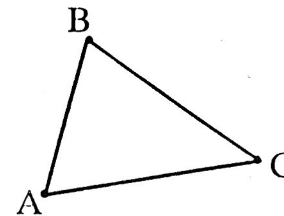
$$\beta = \frac{360^\circ}{n}$$

Duomenys apie atskiras taisyklingųjų daugiakampių rūšis surašyti lentelėje:

Taisyklingojo daugiakampio rūšys	Vidaus kampas	Priekampis	Vidaus kampų suma	Kraštinės ilgis ir aukštinė	Apibrėžtojo ir įbrėžtojo apskritimo spindulys	Plotas
Trikampis	$\alpha = 60^\circ$	$\beta = 120^\circ$	180°	$a = R\sqrt{3}$; $h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3R}{2} = 3r$	$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}h = 2r$; $r = \frac{R}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{h}{3}$	$S = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{h^2}{3}\sqrt{3} = 3r^2\sqrt{3}$
Kvadratas	$\alpha = 90^\circ$	$\beta = 90^\circ$	360°	$a = R\sqrt{2}$	$R = \frac{a\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}$; $r = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$	$S = 2R^2 = a^2 = 4r^2$
Šešiakampis	$\alpha = 120^\circ$	$\beta = 60^\circ$	720°	$a = R = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$	$R = a$; $r = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$S = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = 2r^2\sqrt{3}$

7. TRIKAMPIAI

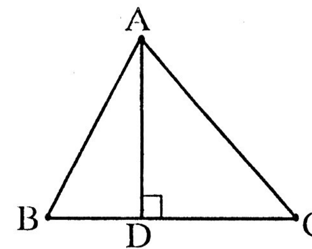
Trikampiu vadiname figūrą, kurią sudaro trys taškai, nepriklausantys vienai tiesei, ir trys atkarpos, jungiančios kiekvienus du iš tų taškų.



56 pav.

Tuos tris taškus vadiname trikampio **viršūnėmis**, o atkarpas - jo **kraštinėmis**. Trikampį žymime, nurodydami jo viršūnes. 56 paveiksle pavaizduotas trikampis ABC, kurio viršūnės yra taškai A , B ir C, o kraštinės AB , BC ir AC.

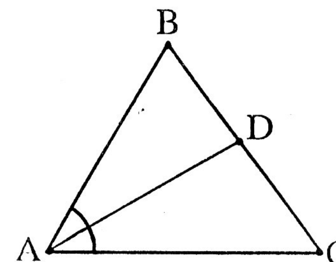
• **APIBRĖŠIME TRIKAMPIO ELEMENTUS :**



57 pav.

Trikampio aukštinė - statmuo, išvestas iš trikampio viršūnės į tiesę, kurioje yra prieš viršūnę esanti kraštinė.

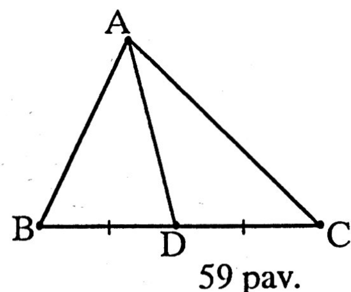
57 paveiksle atkarpa AD yra trikampio ABC aukštinė.



58 pav.

Trikampio pusiaukampinė - trikampio kampo pusiaukampinės atkarpa, jungianti trikampio viršūnę su prieš ją esančios kraštinės tašku.

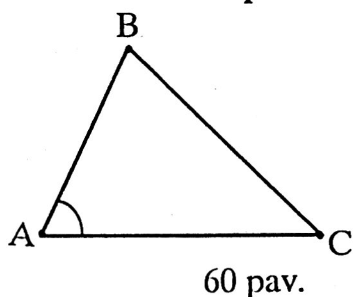
58 paveiksle atkarpa AD yra trikampio ABC pusiaukampinė.



59 pav.

Trikampio pusiaukraštinė - atkarpa, jungianti trikampio viršūnę su prieš ja esančios kraštinės viduriu.

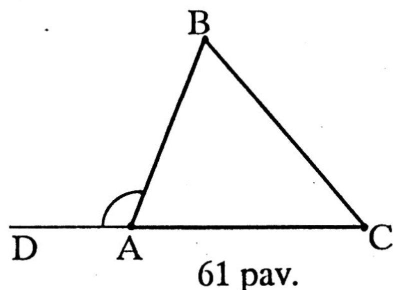
59 paveiksle atkarpa AD yra trikampio ABC pusiaukraštinė (BD=CD).



60 pav.

Trikampio ABC **vidaus kampu** (arba tiesiog **kampu**) **prie viršūnės A** vadiname kampą, kurį sudaro pustiesės AB ir AC (žr. 60 pav.).

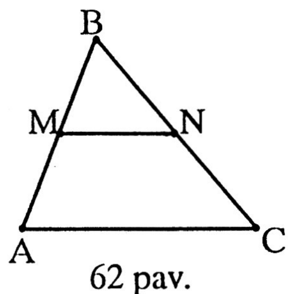
Panašiai apibrėžiami to trikampio kampai prie viršūnių B ir C.



61 pav.

Trikampio priekampiu prie trikampio viršūnės vadiname kampą, gretutinį trikampio kampui prie tos viršūnės.

61 paveiksle kampas BAD - trikampio prieškampis prie viršūnės A.



62 pav.

Trikampio vidurinė linija - atkarpa jungianti dviejų jo kraštinių vidurio taškus.

62 paveiksle atkarpa MN yra trikampio ABC vidurinė linija.

• TRIKAMPIO LYGUMAS. TRIKAMPIŲ LYGUMO POŽYMIAI.

Trikampius ABC ir $A_1B_1C_1$ vadiname <u>lygiais</u>, kai $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, t.y. lygiais vadiname trikampius, kurių atitinkamos kraštinės lygios ir atitinkami kampai lygūs..

Pagrindinė lygių trikampių egzistavimo savybė (trikampio, lygaus duotajam, egzistavimo aksioma).

Kad ir koks būtų trikampis, yra jam lygus trikampis, kurio padėtis duotos pustiesės atžvilgiu yra iš anksto nurodyta.

Trikampio lygumo požymiai.

1 požymis. Jei vieno trikampio dvi kraštinės ir kampas tarp jų atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kraštinėms ir kampui tarp jų, tai tie trikampiai lygūs (***trikampių lygumo požymis pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų***).

2 požymis. Jei vieno trikampio kraštinė ir prie jos esantys kampai lygūs kito trikampio kraštinei ir prie jos esantiems kampams, tai tie trikampiai lygūs (***trikampių lygumo požymis pagal kraštinę ir prie jos esančius kampus***).

3 požymis. Jei visos vieno trikampio kraštinės atitinkamai lygios kito trikampio kraštinėms, tai tie trikampiai lygūs (***trikampių lygumo požymis pagal tris kraštines***).

• PRAŽULNUSIS TRIKAMPIS

Žymėjimai (žr. 63 pav.) :

α , β , γ - trikampio vidaus kampai ($\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$);

a , b , c - trikampio kraštinės (a=BC - prieš kampą α esančios kraštinės ilgis; b=AC - prieš kampą β esančios kraštinės ilgis; c=AB - prieš kampą γ esančios kraštinės ilgis;

α^I, β^I, γ^I - trikampio priekampiai (α^I - kampo α priekampis; β^I - kampo β priekampis; γ^I - kampo γ priekampis);

h_a, h_b, h_c - trikampio aukštinės, nuleistos iš trikampio viršūnių į tieses, kuriose yra atitinkamos priešais esančios kraštinės a, b, c ;

m_a, m_b, m_c - trikampio pusiaukraštinės, jungiančios trikampio viršūnes su priešais esančių kraštinių a, b, c vidurio taškais;

l_a, l_b, l_c - trikampio pusiaukampinės, jungiančios trikampio viršūnes su priešais esančių kraštinių a, b, c taškais;

MN - trikampio ABC vidurinė linija;

P - trikampio perimetras;

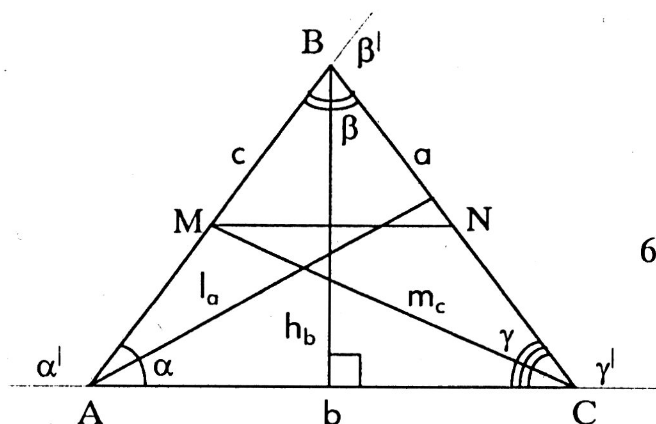
p - trikampio pusperimetris;

R - apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulys;

r - į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys;

$S_{\Delta ABC}$ - trikampio ABC plotas.

* Visos šiame skyrelyje išvardintos savybės ir formulės teisingos bet kuriam trikampiui



63 pav.

Trikampio perimetras yra visų trikampio kraštinių ilgių suma.

$$P=a+b+c$$

Trikampio pusperimetris lygus pusei perimetro.

$$p=\frac{P}{2}=\frac{a+b+c}{2}$$

Trikampio kampų suma lygi 180^0.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0$$

Trikampio priekampių savybės :

1. Trikampio priekampis lygus jam negretutinių trikampio vidaus kampų sumai.

$\alpha^I=\beta+\gamma$, $\beta^I=\alpha+\gamma$, $\gamma^I=\alpha+\beta$

2. Trikampio priekampis yra didesnis už bet kurį jam negretutinį vidaus kampą.

$\alpha' > \beta,\ \alpha' > \gamma$; $\beta' > \alpha,\ \beta' > \gamma$; $\gamma' > \alpha,\ \gamma' > \beta$

3. Trikampio priekampių suma lygi 360^0

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^0$$

Trikampio nelygybė.

Trikampio nelygybe vadiname atstumų tarp trijų taškų savybę, nusakomą šia teorema :

Atstumas tarp dviejų taškų ne didesnis už sumą atstumų nuo tų taškų iki bet kurio trečio taško.

Jei taškai A, B, C yra trikampio viršūnės, tai

kiekviena trikampio kraštinė yra mažesnė už kitų dviejų sumą.

$$a<b+c\ ,\quad b<a+c\ ,\quad c<a+b.$$

Trikampio vidurinės linijos savybė.

Trikampio vidurinė linija yra lygiagreti trečiajai kraštinei ir lygi jos pusei.

$$MN \parallel AC\ ,\quad MN = \frac{AC}{2} = \frac{b}{2}$$

Trikampyje :

1) Lygias kraštines [kampus] atitinka lygūs kampai [lygios kraštinės].
Pavyzdžiui, jei $a=b$, tai $\angle A = \angle B$ [jei $\angle A = \angle B$, tai $a=b$].

2) Prieš didesnį kampą [didesnę kraštinę] yra didesnė kraštinė [didesnis kampas]
Pavyzdžiui, jei $\angle A > \angle B$, tai $a>b$ [jei $a>b$, tai $\angle A > \angle B$].

• KOSINUSŲ TEOREMA.

Trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai minus dviguba sandauga tų kraštinių ir tarp jų esančio kampo kosinuso **(kosinusų teorema).**

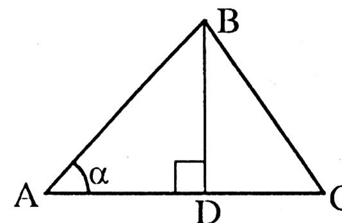
63 paveiksle pavaizduotam trikampiui ABC kosinusų teorema taip užrašoma :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$$

Išvada iš kosinusų teoremos :

Trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai "±" dviguba sandauga vienos jų ir kitos kraštinės projekcijos joje. Ženklą "+" reikia rašyti tada, kai prieš esantis kampas yra bukas, o ženklą "-" rašyti, kai tas kampas smailus.

64 paveiksle pavaizduotam trikampiui ABC :



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD$$

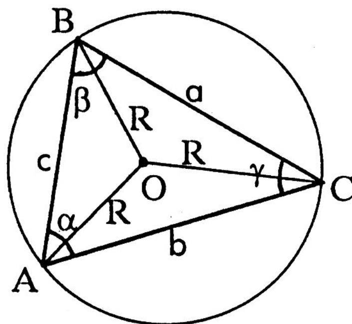
64 pav.

Sinusų teorema.

Trikampio kraštinės proporcingos prieš jas esančių kampų sinusams (sinusų teorema)

63 paveiksle pavaizduotam trikampiui sinusų teorema taip užrašoma :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



65 pav.

Jei apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas, kurio spindulys yra R (žr. 65 pav.), tai

$a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$

Iš pastarųjų lygybių seka, kad

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Trikampių aukštinių h_a, h_b ir h_c skaičiavimo formulės (kai žinomos kraštinės).

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} \quad ; \quad h_b = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}$$

$$h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$$

Trikampio aukštinių savybė :

Trikampio aukštinės kertasi viename taške.

Trikampio aukštinių h_a, h_b ir h_c ir įbrėžto į trikampį apskritimo spindulio r sąryšis.

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

Trikampio aukštinių ir kraštinių sąryšis.

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = bc : ac : ab$$

Trikampio ploto skaičiavimo formulės.

Trikampio plotas lygus pagrindo ir aukštinės sandaugos pusei.

$$S = \frac{1}{2}ah_a \ , \quad S = \frac{1}{2}bh_b \ , \quad S = \frac{1}{2}ch_c$$

Trikampio plotas lygus dviejų jo kraštinių ir sinuso kampo tarp jų sandaugos pusei.

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\beta \ , \quad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \ , \quad S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

Kitos formulės :

$$S = rp \quad ; \quad S = \frac{abc}{4R} \ ;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ - **Herono formulė ;**

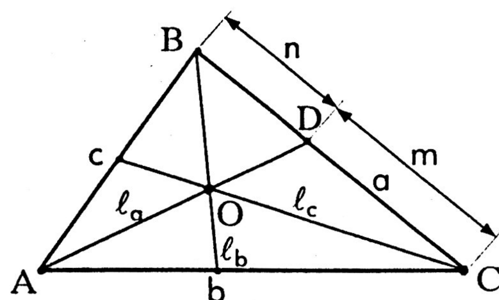
čia p - trikampio pusperimetris , $p = \frac{a+b+c}{2}$

Trikampio ploto skaičiavimas, kai žinomi visi jo kampai :

$$S=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}=\frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta}=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma};$$

$$S=\frac{h_a{}^2\sin\alpha}{2\sin\beta\sin\gamma}=\frac{h_b{}^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin\gamma}=\frac{h_c{}^2\sin\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta}.$$

Trikampio pusiaukampinės savybė.



66 pav.

Trikampio ABC pusiaukampinės ℓ_a, ℓ_b ir ℓ_c kertasi viename taške

(žr.66 pav.).

Pusiaukampinė dalija trikampio kraštinę į atkarpas, proporcingas kitoms dviem jo kraštinėms.

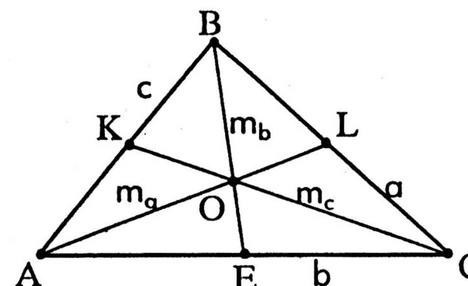
Pusiaukampinei ℓ_a ši savybė taip užrašoma:

$m : n = b : c$; t.y. $CD : BD = AC : AB$ (žr.66 pav.).

$$\ell_a=\sqrt{bc-mn}$$

$$\ell_a=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$$

Trikampio pusiaukraštinės ir jų savybė.



67 pav.

Trikampio pusiaukraštinės m_a, m_b ir m_c kertasi viename taške, kuris dalija kiekvieną pusiaukraštinę santykiu 2 : 1 skaičiuojant nuo trikampio viršūnės , t.y.

$AO = 2OL$, $BO = 2OE$, $OC = 2OK$ (žr. 67 pav.)

Aiškų, kad

$$OB=\frac{2}{3}BE\ ,\ OE=\frac{1}{3}BE \qquad (BE=m_b)$$

$$OC=\frac{2}{3}KC\ ,\ OK=\frac{1}{3}KC \qquad (KC=m_c)$$

$$AO=\frac{2}{3}AL\ ,\ OL=\frac{1}{3}AL \qquad (AL=m_a)$$

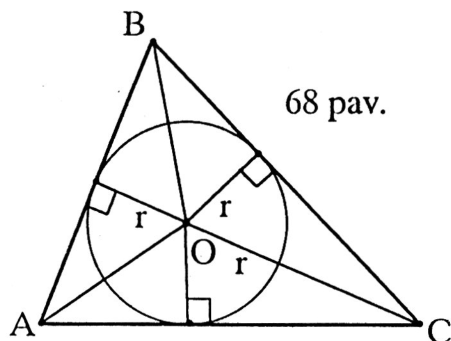
$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} \qquad a=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_b{}^2+m_c{}^2)-m_a{}^2}$$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} \qquad b=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_a{}^2+m_c{}^2)-m_b{}^2}$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2} \qquad c=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_a{}^2+m_b{}^2)-m_c{}^2}$$

$$m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

Į trikampį įbrėžtas apskritimas.



68 pav.

Į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą.

Į trikampį įbrėžto apskritimo centras yra to trikampio pusiaukampinių susikirtimo taškas.

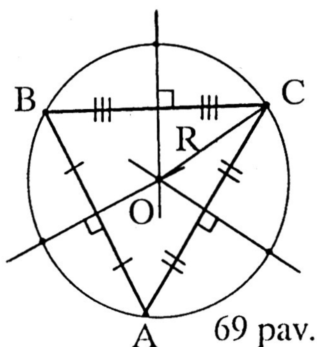
Įbrėžtu į trikampį apskritimu (**įbrėžtiniu** apskritimu) vadiname apskritimą, kuris liečia visas trikampio kraštines.

68 paveiksle pavaizduotas į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas.

$$r = \frac{S}{p}$$, arba $$r = \frac{2S}{a+b+c}$$;

čia p - trikampio pusperimetris.

Apie trikampį apibrėžtas apskritimas



69 pav.

Apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą.

Apie trikampį apibrėžto apskritimo centras yra to trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas.

Apibrėžtu apie trikampį apskritimu (**apibrėžtiniu** apskritimu) vadiname apskritimą, kuris eina per visas trikampio viršūnes.

69 paveiksle pavaizduotas apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas.

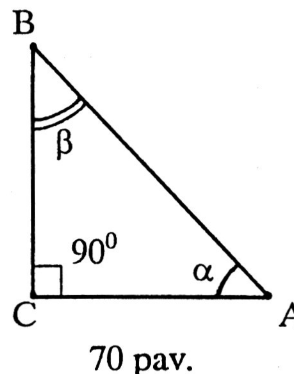
$$R = \frac{abc}{4S}$$;

čia R=OC - apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulys.

Per bet kuriuos tris taškus, nesančius vienoje tiesėje, galima nubrėžti tiktai vieną apskritimą.

Jeigu du apskritimai turi tris bendrus taškus, tai tie apskritimai sutampa.

• STATUSIS TRIKAMPIS



70 pav.

Stačiuoju trikampiu vadiname trikampį, turintį statų kampą.

Kiekvienas statusis trikampis turi tik vieną statų kampą. Kiti du stačiojo trikampio kampai yra smailūs.

Stačiojo trikampio kraštinę, esančią prieš statųjį kampą, vadiname **įžambine,** o kitas dvi kraštines - **statiniais**. 70 paveiksle pavaizduotas trikampis yra statusis, $\angle C=90^0$ - status, AB - įžambinė, CB ir CA - statiniai.

Stačiojo trikampio kraštinių ir kampų sąsajos.

Stačiojo trikampio **smailiojo kampo α sinusu** (žymime $\sin\alpha$) vadiname statinio BC, esančio prieš kampą α, ir įžambinės AB santykį (žr. 70 pav.) :

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

Iš $\sin\alpha$ apibrėžimo seka, kad statinis, esantis prieš kampą α, lygus įžambinei, padaugintai iš $\sin\alpha$, t.y.

$$BC = AB\cdot\sin\alpha \quad \text{, o įžambinė} \quad AB = \frac{BC}{\sin\alpha}$$

Kampo α kosinusu (žymime $\cos\alpha$)vadiname statinio AC, esančio prie to kampo, ir įžambinės AB santykį (žr. 70 pav.) :

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

Iš $\cos\alpha$ apibrėžimo seka, kad statinis, esantis prie kampo α, lygus įžambinei, padaugintai iš $\cos\alpha$, t.y.

$$AC = AB\cdot\cos\alpha \quad \text{, o įžambinė} \quad AB = \frac{AC}{\cos\alpha}$$

Kampo α tangentu (žymime $\mathrm{tg}\alpha$) vadiname statinio BC, esančio prieš kampą α, ir statinio AC, esančio prie kampo α, santykį (žr. 70 pav.)

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$$

Iš $\mathrm{tg}\alpha$ apibrėžimo seka, kad statinis, esantis prieš kampą α, lygus antrajam statiniui, padaugintam iš to $\mathrm{tg}\alpha$, t.y.

$$BC = AC\cdot\mathrm{tg}\alpha$$

Kampo α kotangentu (žymime $\mathrm{ctg}\alpha$) vadiname statinio AC , esančio prie kampo α, ir statinio BC, esančio prieš kampą α, santykį (žr. 70 pav.) :

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC}$$

Iš $\mathrm{ctg}\alpha$ apibrėžimo seka, kad statinis, esantis prie kampo α, lygus antrajam statiniui, panaudotam iš $\mathrm{ctg}\alpha$, t.y.

$$AC = BC\cdot\mathrm{ctg}\alpha$$

Panašius sąryšius galime užrašyti ir kitam trikampio smailiajam kampui β (žr. 70 pav.), būtent : .

$\sin\beta = \frac{AC}{AB}$	$AC = AB\cdot\sin\beta$	$AB = \frac{AC}{\sin\beta}$
$\cos\beta = \frac{BC}{AB}$	$BC = AB\cdot\cos\beta$	$AB = \frac{BC}{\cos\beta}$
$\mathrm{tg}\beta = \frac{AC}{BC}$	$AC = BC\cdot\mathrm{tg}\beta$	$BC = \frac{AC}{\mathrm{tg}\beta}$
$\mathrm{ctg}\beta = \frac{BC}{AC}$	$BC = AC\cdot\mathrm{ctg}\beta$	$AC = \frac{BC}{\mathrm{ctg}\beta}$

Teisingos tapatybės :

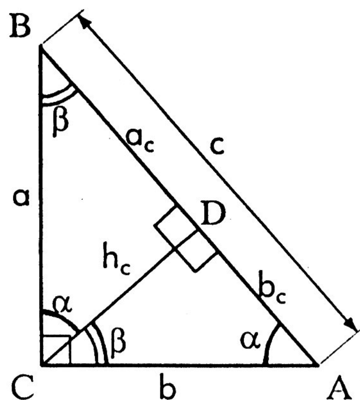
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad ;$$
$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad ;$$
$$1 + \frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad ;$$
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad ; \quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad .$$

Nagrinėjant stačiuosius trikampius, galima taikyti bendruosius trikampių lygumo požymius. Tačiau statiems trikampiams yra **specialių požymių**.

Nagrinėjant stačiuosius trikampius, galima taikyti bendruosius trikampių lygumo požymius. Tačiau statiems trikampiams yra **specialių požymių.**

1. požymis.	Jei vieno stačiojo trikampio įžambinė ir smailusis kampas yra atitinkamai lygūs kito trikampio įžambinei ir smailiajam kampui, tai tie trikampiai lygūs (**lygumo požymis pagal įžambinę ir smailųjį kampą**).
2. požymis.	Jei vieno stačiojo trikampio statinis ir prieš jį esantis kampas yra atitinkamai lygūs kito trikampio statiniui ir prieš jį esančiam kampui, tai tie trikampiai lygūs (**lygumo požymis pagal statinį ir prieš jį esantį kampą**).
3. požymis.	Jei vieno stačiojo trikampio įžambinė ir statinis yra atitinkamai lygūs kito trikampio įžambinei ir statiniui, tai tie trikampiai lygūs (**lygumo požymis pagal įžambinę ir statinį**).

Kiti sąryšiai ir formulės.



71 pav.

Žymėjimai (žr 71 pav.) :

$\gamma = \angle C = 90^0$;

α, β - smailieji trikampio kampai

a , b - statiniai

h_c - aukštinė, nuleista iš stačiojo kampo viršūnės C į įžambinę ;

a_c - statinio a projekcija įžambinėje;

b_c - statinio b projekcija įžambinėje;

S - stačiojo trikampio ABC plotas.

$$\angle CAD = \angle BCD = \alpha \quad ; \quad \angle CBD = \angle ACD = \beta$$

$$\angle C = \angle A + \angle B = 90^0 \quad (\gamma = \alpha + \beta = 90^0)$$

Stačiojo trikampio statinis yra įžambinės ir to statinio projekcijos įžambinėje geometrinis vidurkis.

Ši savybė 71 paveiksle pavaizduotam stačiajam trikampiui užrašoma šitaip :

$$a^2 = c \cdot a_c \quad \left(\text{arba} \quad a = \sqrt{c \cdot a_c}\right)$$

$$b^2 = c \cdot b_c \quad \left(\text{arba} \quad b = \sqrt{c \cdot b_c}\right)$$

Stačiojo trikampio aukštinė, nubrėžta iš stačiojo kampo viršūnės, yra statinių projekcijų įžambinėje geometrinis vidurkis.

Ši savybė 71 paveiksle pavaizduotam trikampiui užrašoma šitaip :

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c \quad \left(\text{arba} \quad h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}\right)$$

VI a.p.m.e. senovės graikų matematikas Pitagoras įrodė teoremą, kurią vadiname **Pitagoro teorema**.

Pitagoro teorema. Stačiojo trikampio įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai.

71 paveiksle pavaizduotam trikampiui Pitagoro teorema užrašoma šitaip :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Iš šios lygybės turime :

$$c=\sqrt{a^2+b^2} \quad , \quad a2=c^2-b^2 \quad , \quad a=\sqrt{c^2-b^2} \quad ,$$

$$b^2=c^2-a^2 \quad , \quad b=\sqrt{c^2-a^2} \quad .$$

Bet kuris stačiojo trikampio statinis yra mažesnis už įžambinę.

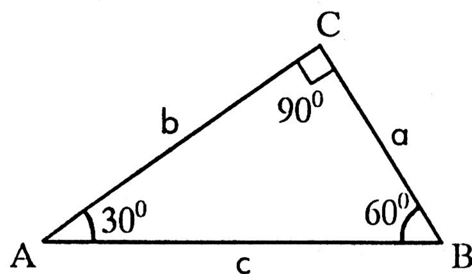
Stačiojo trikampio ploto skaičiavimo formulės.

$$S=\frac{c\cdot h_c}{2} \quad ; \quad S=\frac{a\cdot b}{2}$$

(stačiojo trikampio plotas lygus statinių sandaugos pusei)

Stačiojo trikampio sunkio centras (pusiaukraštinių susikirtimo taškas) nutolęs nuo kraštinių a, b ir c atstumu $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{3}a$ ir $\frac{1}{3}h$ atitinkamai.

Statusis trikampis, kurio vienas kampas lygus 30^0.



72 pav.

72 paveiksle pavaizduotas statusis trikampis ABC, kurio vienas kampas lygus 30^0.

$\angle A=30^0$

$\angle C=90^0$

$\angle B=60^0$

Stačiojo trikampio statinis, esantis prieš 30^0 kampą, lygus pusei įžambinės.

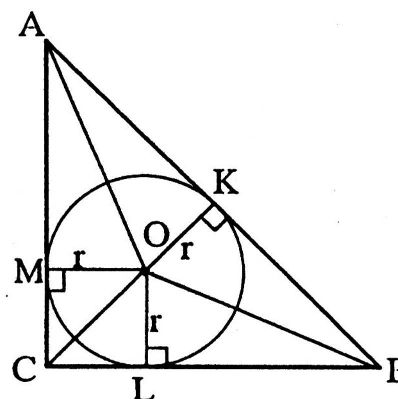
Trikampio ABC kampas C - status, $\angle A=30^0$ (žr. 72 pav.). Todėl

$$a=\frac{c}{2} \; .$$

Kitos formulės :

$$b=\frac{c\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3} \quad ; \quad S=\frac{\sqrt{3}}{8}c^2=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{b^2\sqrt{3}}{6} \; .$$

Į statųjį trikampį įbrėžtas apskritimas (įbrėžtinis apskritimas).



73 pav.

Žymėjimai (žr. 73 pav.) :

O - įbrėžtinio apskritimo centras (pusiaukampinių AO, BO ir CO susikirtimo taškas);

OM=OK=OL=r - įbrėžtinio apskritimo spindulys;

BC=a , AC=b - statiniai;

AB=c - įžambinė.

Teisingos lygybės : CM=CL=r, BK=BL, AK=AM ; be to $OM\perp AC$, $OK\perp AB$, $OL\perp BC$.

Trikampio ABC perimetras lygus dvigubos įžambinės ir įbrėžto apskritimo skersmens sumai.

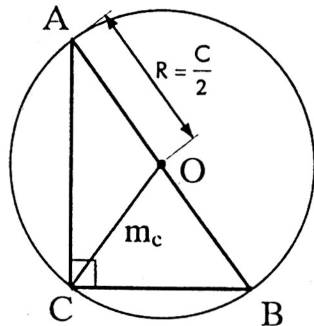
73 paveiksle pavaizduotam trikampiui ABC ši savybė taip užrašoma :

$$a+b+c=2c+2r$$

Tada įbrėžtinio apskritimo spindulys $r = \dfrac{a+b-c}{2}$

Apie statųjį trikampį apibrėžtas apskritimas (apibrėžtinis apskritimas).

Žymėjimai (žr. 74 pav.)



74 pav.

O - apibrėžtinio apskritimo centras;

AB=c - stačiojo trikampio ABC įžambinė ;

m_c - pusiaukraštinė, nubrėžta iš stačiojo kampo viršūnės C į įžambinę ;

R - apibrėžto apskritimo spindulys.

Apibrėžtinio apskritimo centras yra įžambinės vidurio taškas.

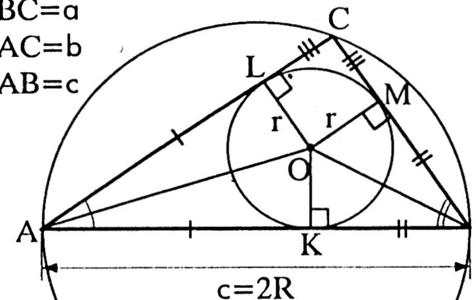
Apibrėžtinio apskritimo spindulys R lygus pusei įžambinės.

$$R = \frac{c}{2} = m_c$$ (žr. 74 pav.)

Skyrelio "Statusis trikampis" pabaigoje išspręsime vieną uždavinį, kuris išreiškia stataus trikampio statinių savybę .

Įrodykite, kad stačiojo trikampio statinių suma lygi įbrėžtojo ir apibrėžtojo apie trikampį apskritimų skersmenų sumai.

Įrodymas.



75 pav.

Sakykime, apie statųjį trikampį ABC (žr. 75 pav.), kurio statiniai a=BC ir b=AC, o įžambinė c=AB, apibrėžtas R spindulio apskritimas ir į tą trikampį įbrėžtas r spindulio apskritimas. Iš brėžinio matyti, kad OK=OM=OL=r ; OK ⊥ AB , OM ⊥ BC , OL ⊥ AC (spindulys išvestas į apskritimo ir liestinės lietimosi tašką, statmenas liestinei); AO - kampo LAK pusiaukampinė , OB - kampo KBM pusiaukampinė.

Trikampiai AOL ir AOK, o taip pat trikampiai BOM ir BOK yra lygūs, nes turi po tris lygias kraštines (žr. trikampių lygumo požymį pagal tris kraštines). Vadinasi, $S_{\Delta OL}=S_{\Delta OK}$ (trikampio AOL plotas lygus trikampio AOK plotui) ir $S_{\Delta BOM}=S_{\Delta BOK}$ (trikampio BOM plotas lygus trikampio BOK plotui).

Keturkampis OLCM yra kvadratas, nes OL=OM=CL=CM=r. Iš brėžinio matome , kad $S_{ABC}=2S_{AOL}+2S_{BOM}+S_{OLCM}$.

Kadangi $S_{ABC}=\dfrac{ab}{2}$, $S_{AOL}=\dfrac{(b-r)r}{2}$, $S_{BOM}=\dfrac{(a-r)r}{2}$, $S_{OLCM}=r^2$,

tai $\dfrac{ab}{2}=2\dfrac{(b-r)r}{2}+2\dfrac{(a-r)r}{2}+r^2$, arba $ab=2r(b-r)+2r(a-r)+r^2$.

Sutvarkę paskutiniąją lygybę, gauname $ab=2r(a+b)-2r^2$. Iš čia $2r^2-2r(a+b)+ab=0$.

Gavome kvadratinę lygtį r atžvilgiu (r - kintamasis).

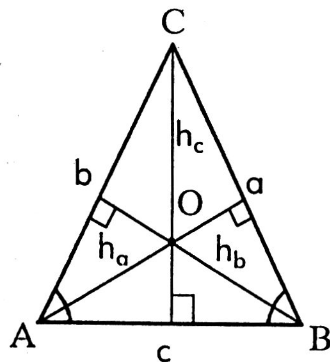
Ją išsprendę randame $r=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Reikšmė $r=\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\frac{a+b+c}{2}$ netinka, nes iš pastarosios lygybės gautume prieštarą $2r>c$, o taip negali būti. Vadinasi, $r=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Taigi $2r=a+b-\sqrt{a^2+b^2}$. Kadangi į apskritimą įbrėžtojo stačiojo trikampio įžambinė lygi to apskritimo skersmeniui, tai $c=\sqrt{a^2+b^2}=2R$. Įrašę šią reikšmę į 2r išraiška, gauname $2r=a+b-2R$. Todėl

$$a+b=2r+2R$$.

• LYGIAŠONIS TRIKAMPIS.

Lygiašoniu trikampiu vadinamas trikampis, turintis dvi lygias kraštines.

Lygiašonio trikampio lygios kraštinės vadinamos jo **šoninėmis kraštinėmis,** o trečioji kraštinė - **pagrindu.** 76 pavaizduotas lygiašonis trikampis ABC.



76 pav.

Žymėjimai (žr. 76 pav.) :

a, b - šoninės kraštinės ;

c - pagrindas.

Lygiašonio trikampio savybės :

1. $a = b$ (šoninės kraštinės lygios);
2. $\angle A=\angle B$ (kampai prie pagrindo lygūs);
3. $h_c=l_c=m_c$ (aukštinė, pusiaukampinė ir

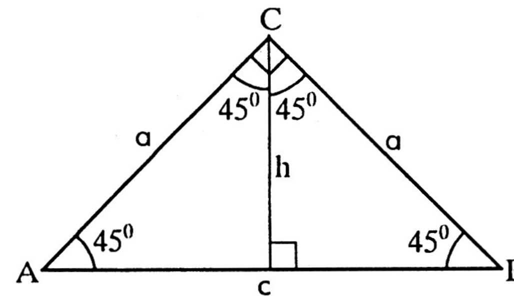
pusiaukraštinė, kertančios pagrindą c , sutampa).

$$h_a=h_b=\frac{2S}{a}\ ;\quad h_c=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-c^2}$$

$$S=\frac{c}{4}\sqrt{4a^2-c^2}\ ;\quad R=\frac{a^2}{2h_c}\ ;\quad r=\frac{c(2a-c)}{4h_c}$$

• STATUSIS LYGIAŠONIS TRIKAMPIS

Statusis trikampis, turintis du lygius statinius, vadinamas **stačiuoju lygiašoniu trikampiu.**



77 pav.

77 paveiksle pavaizduotas trikampis ABC yra statusis lygiašonis trikampis.

AB - įžambinė

$AC=BC=a$ (statiniai lygūs)

$\angle C=90^0$

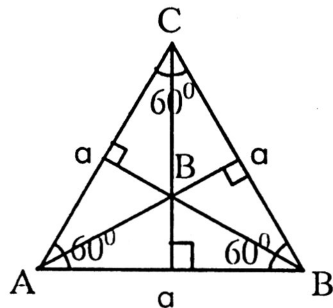
$\angle A=\angle B=45^0$

h - trikampio aukštinė, sutampanti su pusiaukraštine ir pusiaukampine.

$$a=\frac{c}{\sqrt{2}}\ ;\quad h=\frac{c}{2}\ ;\quad S=\frac{c^2}{4}\ ;\quad S=\frac{a^2}{2}$$.

• LYGIAKRAŠTIS TRIKAMPIS

Lygiakraščiu vadinamas trikampis, kurio visos kraštinės ir visi kampai lygūs.



78 pav.

78 paveiksle pavaizduotas lygiakraštis trikampis ABC.

$a=b=c$ (visos kraštinės lygios)

$\angle A=\angle B=\angle C=60^0$ (visi kampai lygūs) (žr. 78 pav.)

$h_a=l_a=m_a$; $h_b=l_b=m_b$; $h_c=l_c=m_c$ (aukštinė, pusiaukampinė ir pusiaukraštinė sutampa)

Lygiakraščio trikampio aukštinę žymėsime raide h.

$h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $r=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$;

$S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $a=R\sqrt{3}$.

• Keturi ypatingi trikampio taškai

1 taškas. Trikampio aukštinės kertasi viename taške.

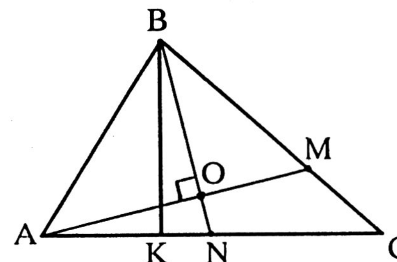
2 taškas. Trikampio pusiaukampinės kertasi viename taške. Šis taškas yra įbrėžto į trikampį apskritimo centras.

3 taškas. Trikampio pusiaukraštinės kertasi viename taške.

4 taškas. Trikampio kraštinių vidurio statmenys kertasi viename taške. Šis taškas yra apie trikampį apibrėžto apskritimo centras.

Išspręsime keletą skyriaus "Trikampiai" uždavinių.

1 uždavinys. Trikampio ABC pusiaukraštinė AM statmena pusiaukraštinei BN. Raskite trikampio ABC plotą, jeigu AM=m ir BN=n.



79 pav.

Sprendimas.

Sakykime pusiaukraštinės AM ir BN kertasi taške O (79 pav.). Remdamiesi trikampio pusiaukraštinių savybe, turime $AO=\frac{2}{3}AM$ .Pusiaukraštinė AM statmena pusiaukraštinei BN, vadinasi, AO — trikampio ABN aukštinė. Trikampio ABN plotas

$S_{ABN}=\frac{1}{2}AO\cdot BN=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}AM\cdot BN=\frac{1}{3}AM\cdot BN=\frac{1}{3}mn$. Trikampiai ABC ir ABN turi bendrą aukštinę BK, išvestą iš viršūnės B, be to, trikampio ABC pagrindas AC dvigubai ilgesnus negu trikampio ABN pagrindas AN. Vadinasi, trikampio ABC plotas dvigubai didesnis negu trikampio ABN plotas.

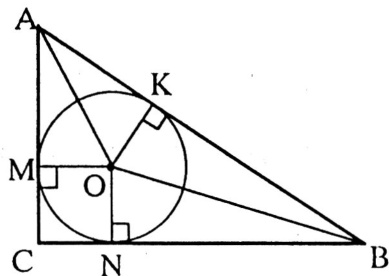
Iš tikrųjų, $S_{ABN}=\frac{1}{2}AN\cdot BK$ ir

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BK=\frac{1}{2}\cdot 2AN\cdot BK=2\cdot\left(\frac{1}{2}AN\cdot BK\right)=2S_{ABN}\ .$$

Taigi $S_{ABC}=2S_{ABN}=2\cdot\frac{1}{3}mn=\frac{2}{3}mn$.

Atsakymas. $\frac{2}{3}mn$.

2 uždavinys.
Į statųjį trikampį ABC įbrėžtas apskritimas, kurio centras nutolęs nuo trikampio viršūnių A ir B atstumais $\sqrt{5}$ ir $\sqrt{10}$. Raskite statinius AC ir BC.



80 pav.

Sprendimas.
Sakykim, ABC - statusis trikampis, kurio statiniai AC ir BC, O - įbrėžtojo apskritimo centras, $AO=\sqrt{5}$ ir $BO=\sqrt{10}$ (žr. 80 pav.). Iš taško O nubrėžkime statmenis OK, OM ir ON į trikampio kraštines. Kadangi apskritimas įbrėžtas į trikampį, tai AO ir BO yra trikampio pusiaukampinės, o statmenys OK, OM ir ON lygūs apskritimo spinduliui, kurį žymėsime raide r. Uždavinys sprendžiamas nesunkiai, jeigu nežinomaisiais laikysime ne statinius, o įbrėžto apskritimo spindulį ir kampą $\alpha=\angle OAK$.

Turime: $\angle CBA = 180^0 - (90^0 + 2\alpha) = 90^0 - 2\alpha$,

$\angle OBK = ½ \angle CBA = ½ (90^0 - 2\alpha) = 45^0 - \alpha$.

Iš stačiųjų trikampių OAK ir OBK randame:

$r = \sqrt{5}\sin\alpha$ ir $r = \sqrt{10}\sin(45^0 - \alpha)$; čia $r = OK$.

Todėl $\sqrt{5}\sin\alpha = \sqrt{10}\sin(45^0 - \alpha)$.

Kadangi $\sin(45^0 - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$, tai $\sin\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha$,

arba $\sin\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha$, arba $2\sin\alpha = \cos\alpha$.

Gavome paprasčiausią trigonometrinę lygtį. Abi lygties puses dalijame iš $\cos\alpha$ ir gauname $\mathrm{tg}\alpha = ½$.

Žinome, kad $\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$. Kadangi $0^0<\alpha<45^0$ (I ketvirčio kampas), tai prieš vardiklyje esančią šaknį rašomas ženklas "+".

Taigi $\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Turime : $r=\sqrt{5}\sin\alpha=\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=1$. Pritaikę Pitagoro teoremą statiems trikampiams AMO ir BNO, randame :

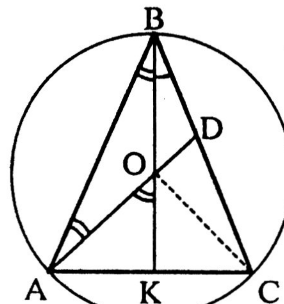
$$AM = \sqrt{AO^2 - OM^2}, \quad AM = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2;$$

$$BN = \sqrt{BO^2 - OB^2}, \quad BN = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 1^2} = 3.$$

Kadangi $AC=AM+MC$, tai $AC=2+1=3$, nes $MC=r=1$. Analogiškai $BC=BN+NC$, t.y. $BC=3+1=4$, nes $NC=r=1$.

Atsakymas. 3 ; 4 .

3 uždavinys. Per smailiojo lygiašonio trikampio ABC pagrindo AC tašką A ir apie tą trikampį apibrėžto apskritimo centrą O nubrėžta tiesė, kertanti kraštinę BC taške D. Apskaičiuokite atkarpos AD ilgį, kai $AB=BC=b$, o $\angle ABC=\alpha$.



81 pav.

Sprendimas.
Apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras O yra pusiaukampinėje BK (žr. 81 pav.), nes BK yra kraštinės AC vidurio statmuo ($BK \perp AC$ ir $AK=KC$). $\angle ABO = \frac{\alpha}{2}$, nes pusiaukampinė BK dalija kampą $\angle ABC=\alpha$ pusiau. Trikampis AOB yra

lygiašonis, nes turi dvi lygias kraštines AO=OB=R, čia R - apibrėžto apskritimo spindulys. Vadinasi, $\angle ABO = \frac{\alpha}{2}$, (lygiašonio trikampio AOB kampai prie pagrindo lygūs). Taigi du trikampio ABD kampai žinomi : $\angle BAD=\frac{\alpha}{2}$, $\angle ABD=\alpha$. Tada trečiasis trikampio ABD kampas

$$\angle ADB = 180^0 - (\angle BAD + \angle ABD) = 180^0 - (\frac{\alpha}{2} + \alpha) = 180^0 - \frac{3\alpha}{2}.$$

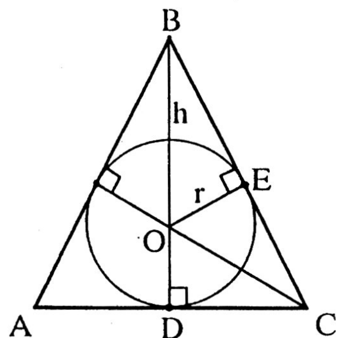
Remdamiesi sinusų teorema, iš trikampio ABD gauname

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\left(180^0 - \frac{3\alpha}{2}\right)}. \quad \text{Todėl } AD = \frac{b\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

Pastaba. Trikampio ABD kampą BAD galėjome rasti ir kitu būdu. $\angle AOC=2\angle ABC=2\alpha$ (įbrėžtinis kampas ABC lygus pusei centrinio kampo AOC). Kadangi ΔDAC lygiašonis, tai $\angle OAC=\angle OCA=90^0-\alpha$. Todėl $\angle BAD = \angle BAC - \angle OAC = 90^0 - \frac{\alpha}{2} - (90^0-\alpha) = \frac{\alpha}{2}$.

4 uždavinys. Duotas lygiašonis trikampis ABC, kurio AB=BC=a, o aukštinė BD=h. Rasti į trikampį įbrėžto apskritimo spindulį.

Sprendimas.



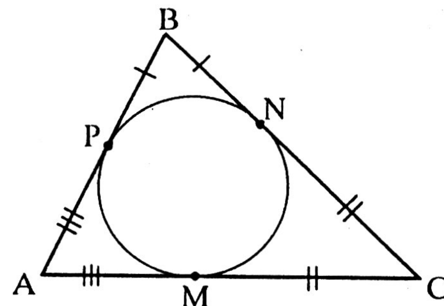
82 pav.

Sakykim, O - įbrėžtojo apskritimo centras; tada jis priklauso aukštinei BD (žr. 82 pav.). Jeigu apskritimo ir kraštinės BC lietimosi tašką pažymėsime E, tai OE=r (r - įbrėžtojo apskritimo spindulys) ir OE⊥BC (spindulys statmenas liestinei lietimosi taške). Kadangi trikampiai CDB ir OEB yra statieji ir turi po vienodą smailųjį kampą DBC (yra bendrasis trikampių CDB ir OEB kampas), tai jie panašūs :$\Delta DEB \sim \Delta CDB$. Vadinasi, trikampių OEB ir CDB atitinkamos kraštinės proporcingos. Turime : $\frac{OB}{BC} = \frac{OE}{DC}$. Bet OB=BD-OD=h-r (OD=r), o $DC=\sqrt{a^2-h^2}$ (taikėme Pitagoro teoremą stačiajam trikampiui BCD), todėl $\frac{h-r}{a} = \frac{r}{\sqrt{a^2-h^2}}$.

Iš čia $$r = \frac{h\sqrt{a^2-h^2}}{a+\sqrt{a^2-h^2}}.$$

5 uždavinys. Įtrikampį ABC, kurio plotas lygus S, įbrėžtas spindulio r apskritimas, liečiantis trikampio kraštines AC ir BC atitinkamai taškuose M ir N. Rasti kraštinės AC ilgį, jeigu AM:MC=2:3 irBN:NC=5:6.

Sprendimas.



83 pav.

Sakykime, kraštinės AC ilgis lygus a (83 pav.). Pagal sąlygą AM : MC=2:3, todėl AM=2x, o MC=3x (čia abiejose paskutinėse lygybėse x – pastovus daugiklis).

Kadangi AM+MC=AC, tai 2x+3x=a ; iš čia $x=\frac{a}{5}$. Vadinasi, $AM=2x=\frac{2a}{5}$, o $MC=3x=\frac{3a}{5}$. Remdamiesi liestinių, išvestų iš vieno taško, savybe, turime: $NC=MC=\frac{3a}{5}$ ir tada iš sąlygos BN:NC=5:6 gauname: $\frac{BN}{\frac{3a}{5}} = \frac{5}{6}$, t.y. $BN=\frac{a}{2}$. Jeigu apskritimas liečia kraštinę AB taške P, tai taip pat $AP=AM=\frac{2a}{5}$ ir $BP=BN=\frac{2a}{5}$. Trikampio ABC plotą galima skaičiuoti pagal formulę

$$S = p\,r, \quad (1)$$

kur $p=\frac{AC+AB+BC}{2}$ -trikampio pusperimetris.

Kadangi AC=a, AB=AP+BP, BC=BN+NC, tai

$$p=\frac{a+AP+BP+BN+NC}{2}=\frac{a+\frac{2a}{5}+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{3a}{5}}{2}=\frac{30\cdot a}{20}=\frac{3a}{2}.$$

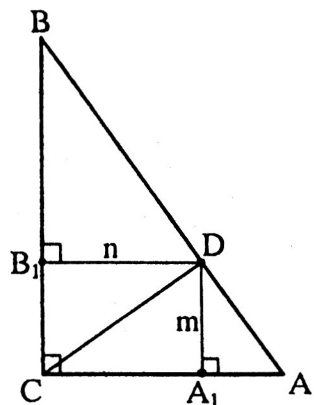
Įrašę rastąją pusperimetrio p reikšmę į (1) formulę, gauname $S=\frac{3}{2}ar$.

Iš čia $a=\frac{2}{3}\frac{S}{r}$.

<u>Atsakymas</u>. $\frac{2}{3}\frac{S}{r}$.

<u>6 uždavinys</u>. Stačiajame trikampyje ABC iš stačiojo kampo viršūnės C išvesta aukštinė CD. Taškas D nutolęs nuo statinių AC ir BC atitinkamai atstumais m ir n. Raskite statinių ilgius.

<u>Sprendimas</u>.



84 pav.

Sakykime, $DA_1 \perp AC$ ir $DB_1 \perp BC$, nes atstumu nuo taško iki tiesės laikomas statmens, išvesto iš to taško į tiesę, ilgis (84 pav.). Jeigu dvi tiesės statmenos vienai ir tai pačiai trečiajai tiesei, tai jos lygiagrečios. Todėl, jei $DA_1 \perp AC$ ir $BC \perp AC$, tai $DA_1 \parallel BC$. Analogiškai, jei $DB_1 \perp BC$ ir $AC \perp BC$, tai $DB_1 \parallel AC$. Vadinasi, CB_1DA_1 - stačiakampis. Tada $CA_1=DB_1=n$ ir $CB_1=DA_1=m$. Atkarpa DA_1 yra stačiojo trikampio CDA aukštinė, išvesta iš stačiojo kampo viršūnės D. Kadangi stačiojo trikampio aukštinė, išvesta iš stačiojo kampo viršūnės yra statinių projekcijų įžambinėje geometrinis vidurkis, tai

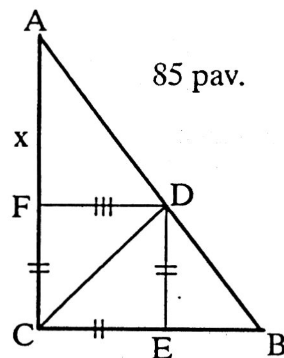
$$DA_1^2=CA_1\cdot A_1A.$$

Pažymėję b=AC, šią lygybę perrašykime taip : $m^2=n(b-n)$. Iš čia $b=\frac{n^2+m^2}{n}$.

Analogiškai, pažymėję BC=a, iš stataus trikampio BCD randame $a=\frac{n^2+m^2}{m}$. Vadinasi, statinių ilgiai lygūs $\frac{n^2+m^2}{n}$ ir $\frac{n^2+m^2}{m}$.

<u>7 uždavinys</u>. Stačiojo trikampio įžambinės taškas yra vienodai nutolęs nuo statinių ir dalija įžambinę į 40 cm ir 30 cm ilgio atkarpas. Raskite trikampio statinius.

<u>Sprendimas</u>.

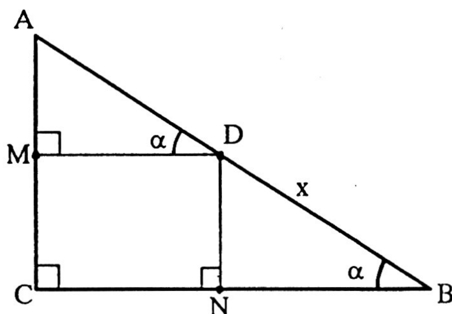


85 pav.

Sakykim, kad duotas statusis trikampis ABC (85 pav.). Ant įžambinės AB atidėkime tašką D taip, kad AD=40, DB=30. Iš taško D išveskime statmenis DF ir DE į statinius AC ir BC. Kadangi DF lygus taško D atstumui iki statinio AC, o DE lygus taško D atstumui iki statinio BC, tai, remiantis uždavinio sąlyga, DF=DE. Vadinasi, keturkampis CFDE - kvadratas, o CD - jo įstrižainė. Bet tada CD trikampio ABC kampo C pusiaukampinė. Remiantis trikampio pusiaukampinės savybe, $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$, arba $\frac{AC}{BC}=\frac{40}{30}=\frac{4}{3}$. Pažymėję AC=x, iš uždavinio sąlygos pagal Pitagoro teoremą randame : $BC=\sqrt{70^2-x^2}$. Todėl $\frac{x}{\sqrt{70^2-x^2}}=\frac{4}{3}$. Iš čia x=56 arba x=-56. Kadangi 0<x<70, tai AC=56, BC=42.

<u>Atsakymas</u>. 56 cm, 42 cm.

8 uždavinys. Stačiojo trikampio ABC įžambinė AB=C sudaro su statiniu BC kampą α. Rasime tokį įžambinės AB tašką, kad jo atstumų iki statinių AC ir BC kvadratų suma būtų mažiausia.



86 pav.

Sprendimas.

Sakykime, AB = c - stačiojo trikampio ABC įžambinė, $\angle ABC=\alpha$ (žr. 86 pav.).

Paimkime bet kurį įžambinės AB tašką D. Prisiminkime, kad atstumu nuo taško iki tiesės vadinamas statmens, išvesto iš šio taško į tiesę, ilgis. Vadinasi, jei iš taško D nubrėšime atkarpas $DM \perp AC$ ir $DN \perp BC$, tai šios atkarpos ir bus atstumai nuo taško D atitinkamai iki tiesių AC ir BC. Pažymėkime BD=x. Tada $AD = c - x$. Iš trikampių DNB ir DMA randame : $DN=x\sin\alpha$, $DM=(c-x)\cos\alpha$. Vadinasi, taško D atstumų iki AC ir BC kvadratų suma lygi

$f(x)=x^2\sin^2\alpha+(c-x)^2\cos^2\alpha=x^2-2x\,c\cos^2\alpha+c^2\cos^2\alpha$, čia $0 \le x \le c$. Reikia rasti funkcijos f(x) mažiausiąją reikšmę atkarpoje [0 ; C]. Randame funkcijos f(x) kritinius taškus : $f'(x)=2x-2c\cos^2\alpha$; $f'(x)=0$, kai $x=c\cos^2\alpha$.

Kadangi $0 < \cos^2\alpha < 1$, tai $c\cos^2\alpha \in [0 ; C]$.

Apskaičiuosime funkcijos f(x) reikšmes atkarpos [0 ; C] galuose ir kritiniame taške $x=c\cos^2\alpha$. Iš šių reikšmių išrinksime mažiausiąją reikšmę, kuri ir bus funkcijos f(x) mažiausioji reikšmė atkarpoje [0 ; C]. Turime :

$$f(0)=c^2\cos^2\alpha \ ; \ f(c)=c^2\sin^2\alpha \ ;$$

$f(c\cos^2\alpha)=c^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$. Matome, kad $f(c\cos^2\alpha)<f(0)$ ir $f(c\cos^2\alpha)<f(c)$. Vadinasi, mažiausiąją reikšmę funkcija f(x) įgyja taške $x=c\cos^2\alpha$. Taigi

$BD=c\cos^2\alpha$, t.y. įžambinės taškas D turi būti nutolęs nuo viršūnės B atstumu $c\cos^2\alpha$.

9 uždavinys. Koks turi būti kampo prie duotojo ploto lygiašonio trikampio pagrindo laipsninis matas, kad įbrėžtojo į šį trikampį apskritimo spindulys būtų didžiausias ?

Sprendimas.

87 pav.

Sakykime, ABC - nagrinėjamasis trikampis. Pažymėsime : AC=CB=a, $\angle CAB=\angle CBA=\alpha$, $S_{ABC}=S$ (87 pav.).

Turime : $AD=AC\cdot\cos\alpha$, $AD=\frac{AB}{2}$,

$\frac{AB}{2}=AC\cdot\cos\alpha$ (žr. brėžinį).

Iš čia $AB=2AC\cdot\cos\alpha=2a\cos\alpha$.

Tada $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}2a^2\sin\alpha\cos\alpha==\frac{1}{2}a^2\sin2\alpha$. Iš šios lygybės trikampio šoninė kraštinė $a=\sqrt{\frac{2S}{\sin2\alpha}}$. Trikampio pusperimetris $p=AC+\frac{1}{2}\cdot AB=a+a\cos\alpha$. Išreikšime įbrėžto apskritimo spindulį r kaip kampo α funkciją. Turime $r=\frac{S}{p}$. Į šią lygybę surašę anksčiau gautas S, p bei a išraiškas, gauname :

$$r(\alpha)=\frac{\frac{1}{2}a^2\sin2\alpha}{a+a\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{2}a\sin2\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2S}{\sin2\alpha}}\sin2\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2S}}{2}\,\frac{\sqrt{\sin2\alpha}}{1+\cos\alpha},\ \text{kur } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Rasime funkcijos $r(\alpha)$ kritinius taškus :

$$r^{I}(\alpha)=\frac{\sqrt{2S}}{2}\cdot\frac{\left(\sqrt{\sin 2\alpha}\right)^{I}(1+\cos\alpha)-(1+\cos\alpha)^{I}\sqrt{\sin 2\alpha}}{(1+\cos\alpha)^{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2S}}{2}\cdot\frac{\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{\sin 2\alpha}}(1+\cos\alpha)+\sin\alpha\sqrt{\sin 2\alpha}}{(1+\cos\alpha)^{2}}=\frac{\sqrt{2S}}{2}\cdot\frac{\cos 2\alpha(1+\cos\alpha)+\sin\alpha\sin 2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sqrt{\sin 2\alpha}}=0\ ;$$

$$\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=0\ ;$$

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha=0\ ;\ \cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=0.$$

Iš paskutinės lygties $\frac{3\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}$, t.y. $\alpha=\frac{\pi}{3}$, arba $\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}$, t.y. $\alpha=\pi$. Kritinis taškas $\alpha=\pi$ nepriklauso nagrinėjamam intervalui $(\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\ )$, todėl jį atmetame.

Kadangi $\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$, o

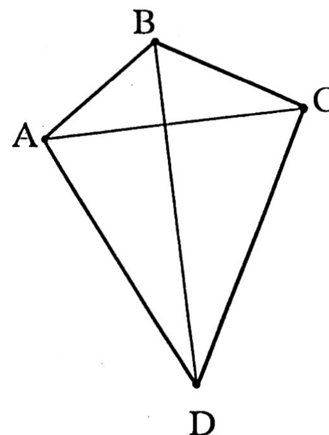
$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sqrt{2S}}{2}\cdot\frac{\sqrt{\sin 2\alpha}}{1+\cos\alpha}\right)=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{2S}}{2}\cdot\frac{\sqrt{\sin 2\alpha}}{1+\cos\alpha}\right)=0\ ,$$

tai didžiausią spindulio r reikšmę gauname, kai $\alpha=\angle CBA=\frac{\pi}{3}$, t.y. kai trikampis ABC yra lygiašonis.

8. KETURKAMPIAI

Keturkampiu vadiname figūrą, kurią sudaro keturi taškai ir keturios nuosekliai juos jungiančios atkarpos.

Laikome, kad bet kurie trys iš tų taškų nepriklauso vienai tiesei, o **juos** jungiančios atkarpos nesusikerta. Tuos keturis taškus vadiname **keturkampio viršūnėmis**, o juos jungiančias atkarpas - **keturkampio kraštinėmis.** Keturkampį žymime jo viršūnėmis.



88 pav.

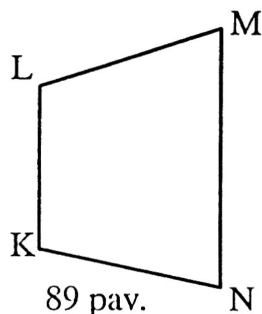
88 paveiksle pavaizduotas keturkampis ABCD.

Gretimomis viršūnėmis vadiname keturkampio viršūnes, kurios yra vienos kraštinės galai. Negretimas viršūnes vadiname **priešingomis.** Atkarpas jungiančias priešingąsias keturkampio viršūnes vadiname jo **įstrižainėmis.** 88 paveiksle pavaizduoto keturkampio ABCD viršūnės **A ir B** yra gretimos, o viršūnės B ir D - priešingos ; įstrižainės yra atkarpos AC ir BD.

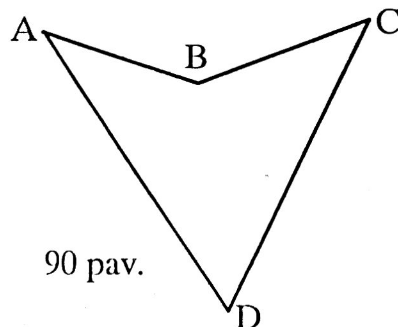
Keturkampio kraštines, išeinančias iš vienos viršūnės, vadiname **gretimomis kraštinėmis.** Neturinčios bendro galo kraštines vadiname **priešingomis kraštinėmis.** 88 paveiksle pavaizduoto keturkampio priešingos kraštinės yra AB ir CD, BC ir AD, o kraštinės AB ir AD yra gretimos.

Iškiliuoju keturkampiu (daugiakampiu) vadiname keturkampį (daugiakampį), esantį vienoje pusplokštumėje nuo kiekvienos tiesės, kurioje yra jo **kraštinė.**

Laikoma, kad pati tiesė priklauso pusplokštumei, kurioje yra keturkampis. 89 paveiksle pavaizduotas iškilasis keturkampis KLMN, o 90 paveiksle pavaizduotas keturkampis ABCD yra neiškilasis.



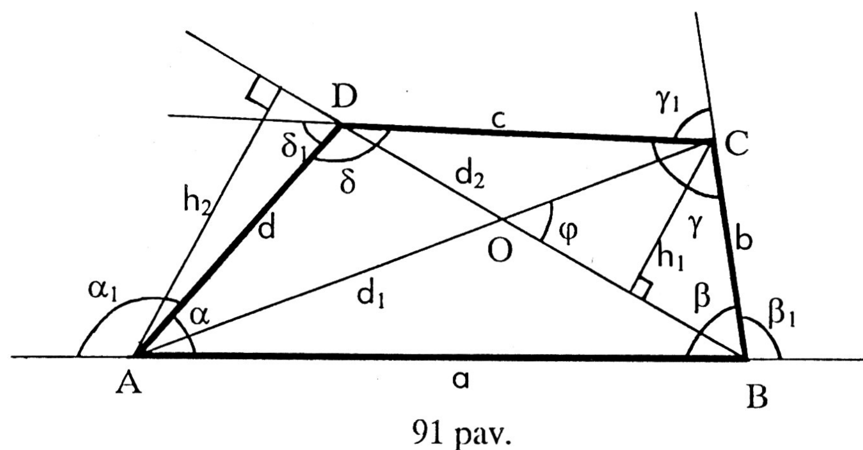
89 pav.



90 pav.

Toliau nagrinėsime tik iškiliuosius keturkampius.

• BET KOKS IŠKILASIS KETURKAMPIS.



91 pav.

91 paveiksle pavaizduotas iškilusis keturkampis ABCD.

Žymėjimai (žr. 91 pav.) :

$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$ - keturkampio ABCD kraštinės ;

$\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$, $\angle D=\delta$ - keturkampio vidaus kampai ;

α_1, β_1, γ_1, δ_1 - atitinkamų keturkampio vidaus kampų priekampiai ;

$p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ - pusperimetris ;

φ - kampas tarp įstrižainių d_1 ir d_2 ;

$AC=d_1$, $BD=d_2$ - keturkampio įstrižainės ;

Θ - priešingų kampų sumos pusė ;

h_1, h_2 - statmenys, nuleisti iš priešingų viršūnių į vieną įstrižainę (paveiksle į įstrižainę d_1) ;

S - keturkampio plotas .

Keturkampio kampų suma lygi 360^0

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0$$

Keturkampio vidaus kampų priekampių suma lygi 360^0

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1=360^0$$

Keturkampio ploto skaičiavimo formulės :

$$S=\frac{1}{2}(h_1+h_2)d_2$$

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$$

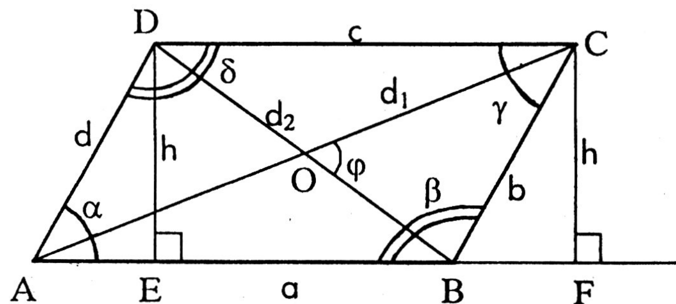
(Keturkampio plotas lygus įstrižainių ir sinuso kampo tarp jų sandaugos pusei).

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}-abcd\cos^2\theta$$

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(2d_1d_2+a^2+c^2-b^2-d^2)(2d_1d_2-a^2-c^2+b^2+d^2}$$

• LYGIAGRETAINIS

Lygiagretainiu vadiname keturkampį, kurio priešingos kraštinės lygiagrečios, t.y. priklauso lygiagrečioms tiesėms.



92 pav.

Žymėjimai (92 pav.) :

a, b, c, d - lygiagretainio ABCD kraštinės ;

α, β, γ, δ - lygiagretainio vidaus kampai ;

h=DE=CF - aukštinė ;

$AC=d_1$, $BD=d_2$ - įstrižainės ;

φ - kampas tarp įstrižainių .

Lygiagretainio požymis.

Teorema. Jei keturkampio įstrižainės susikerta ir susikirtimo taškas jas dalija pusiau, tai tas keturkampis yra lygiagretainis.

Atvirkštinė teorema.

Teorema.

Lygiagretainio įstrižainės susikerta, ir susikirtimo taškas jas dalija pusiau.

AO=OC , OB=OD (žr. 92 pav.)

Lygiagretainio priešingosios kraštinės lygios, priešingieji kampai lygūs.

$a=c$, $b=d$ (žr. 92 pav.),

$\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$ (žr. 92 pav.).

Lygiagretainyje prie vienos kraštinės esančių kampų suma lygi 180^0.

$$\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\delta=\delta+\alpha=180^0$$ (žr. 92 pav.).

Lygiagretainio kraštinių kvadratų suma lygi įstrižainių kvadratų sumai.

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2a^2+2b^2=d_1{}^2+d_2{}^2$$ (žr. 92 pav.).

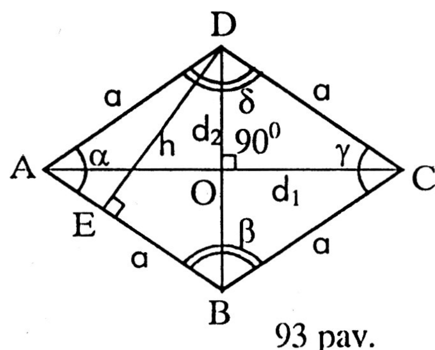
Lygiagretainio ploto skaičiavimo formulės :

$S=a\,h$ (Lygiagretainio plotas lygus kraštinės ir į ją nuleistos aukštinės ; $S=a\,d\,\sin\alpha$ (Lygiagretainio plotas lygus dviejų gretimų kraštinių ir sinuso kampo tarp jų sandaugai)

$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$. (Lygiagretainio plotas lygus įstrižainių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei)

• ROMBAS

Rombu vadiname lygiagretainį, kurio visos kraštinės lygios.



93 pav.

93 paveiksle pavaizduotas rombas ABCD (AB=BC=CD=AD).

Žymėjimai (žr. 93 pav.) :

AB=BC=CD=AD=a - rombo kraštinė ;

AC=d_1 , BD=d_2 - rombo įstrižainės (simetrijos ašys) ;

α, β, γ, δ - rombo vidaus kampai ;

DE=h - rombo aukštinė ;

Rombo įstrižainės susikerta stačiu kampu. Rombo įstrižainės yra jo kampų pusiaukampinės. Rombo įstrižainių susikirtimo taškas kiekvieną jų dalija pusiau.

$d_1 \perp d_2$; ∠DCO=∠OCB=∠DAO=∠OAB=∠ABO=∠OBC=∠ADO=∠ODC

AO=OC , BO=OD (žr. 93 pav.).

Rombo priešingieji kampai lygūs.

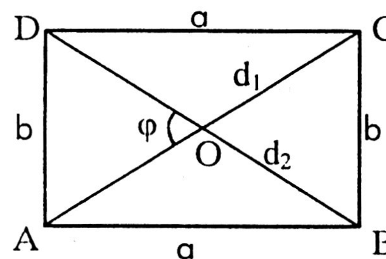
$\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ (žr. 93 pav.).

Rombo ploto S skaičiavimo formulės :

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$; $$S = a^2 \sin\alpha = a^2 \sin\beta$$; $$S = ah$$.

• STAČIAKAMPIS.

Stačiakampiu vadiname lygiagretainį, kurio visi kampai statūs.



94 pav.

94 paveiksle pavaizduotas stačiakampis ABCD

(∠A=∠B=∠C=∠D=90^0).

AB || CD , AD || BC

AB=CD=a , BC=AD=b .

Stačiakampio įstrižainės lygios.

$d_1=d_2=d$ (žr. 94 pav.).

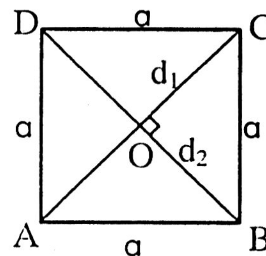
Stačiakampio ploto skaičiavimo formulės :

$$S = a \cdot b$$; $$S = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi$$

čia d - viena iš stačiakampio įstrižainių ; o φ - kampas tarp įstrižainių.

• KVADRATAS.

Kvadratu vadiname stačiakampį, kurio visos kraštinės lygios.



95 pav.

95 paveiksle pavaizduotas kvadratas ABCD (AB=BC=CD=AD=a).

∠A=∠B=∠C=∠D=90^0.

$d_1=d_2=d$ (kvadrato įstrižainės lygios ir kertasi stačiu kampu).

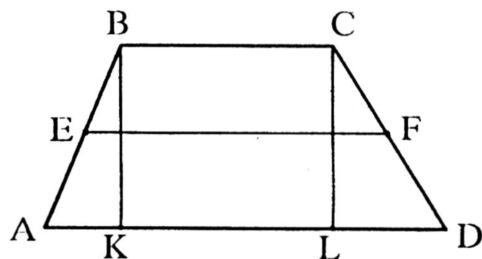
$$d_1 = d_2 = a\sqrt{2}$$

Kvadrato ploto skaičiavimo fomulės :

$S = a^2$; $S = \frac{1}{2}d^2$; čia d - kvadrato įstrižainė.

• TRAPECIJA

Trapecija vadiname iškiląjį keturkampį, kuris turi tik dvi lygiagrečias priešingąsias kraštines.



96 pav.

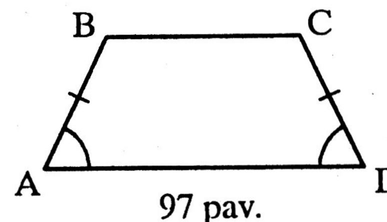
Tas lygiagrečias kraštines vadiname **trapecijos pagrindais**. Kitas dvi kraštines vadiname **šoninėmis kraštinėmis**.

96 paveikslc pavaizduota trapecija ABCD. Kraštinės BC ir AD - **trapecijos pagrindai**, AB ir CD - **trapecijos šoninės kraštinės**.

Iš taškų B ir C nuleiskime statmenis BK ir CL į tiesę AD. Šie statmenys vadinami **trapecijos aukštine**. Atkarpą, kuri jungia šoninių kraštinių vidurio taškus, vadiname **trapecijos vidurine linija**. 96 paveikslc pavaizduotos trapecijos **vidurinė linija** yra EF.

Trapecijų rūšys :

1) **Lygiašonė trapecija.**



97 pav.

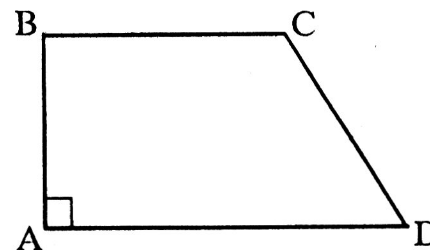
Trapeciją, kurios šoninės kraštinės lygios, vadiname **lygiašone**.

97 paveikslc pavaizduota trapecija ABCD yra **lygiašonė**, nes AB=CD.

Lygiašonės trapecijos kampai prie kiekvieno iš pagrindų lygūs.

$$\angle A=\angle D\,,\ \angle B=\angle C.$$

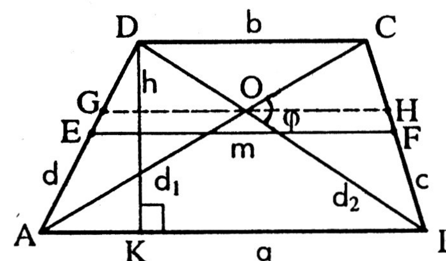
2) **Stačioji trapecija**.



98 pav.

Trapeciją, kurios viena šoninė kraštinė statmena pagrindui, vadiname **stačiąja**.

98 paveikslc pavaizduota stačioji trapecija ABCD, kurios $AB \perp AD$.



99 pav.

Žymėjimai (žr. 99 pav.) :

AB=a , CD=b - trapecijos ABCD pagrindai ;

BC=c , AD=d - trapecijos šoninės kraštinės ;

EF=m - trapecijos vidurinė linija ;

GH - atkarpa, lygiagreti pagrindams ir einanti per įstrižainių susikirtimo tašką ;

DK = h - aukštinė ;

$p = \frac{a+b+c+d}{2}$ - pusperimetris ;

$AC = d_1$, $BD = d_2$ - trapecijos įstrižainės ;

φ - kampas tarp įstrižainių .

Trapecijos vidurinė linija lygiagreti pagrindams ir lygi jų sumos pusei.

$m \parallel a \quad , \quad m \parallel b$; $m = \frac{a+b}{2}$ (žr. 99 pav.)

$d_1 = ab + \frac{d^2a - c^2b}{a-b}$; $d_2 = ab + \frac{c^2a - d^2b}{a-b}$

$GH = \frac{2ab}{a+b}$

Trapecijos ploto skaičiavimo formulės :

$S = mh$ (Trapecijos plotas lygus vidurinės linijos ir aukštinės sandaugai)

$S = \frac{a+b}{2}h$ (Trapecijos plotas lygus pagrindų sumos pusės ir aukštinės sandaugai)

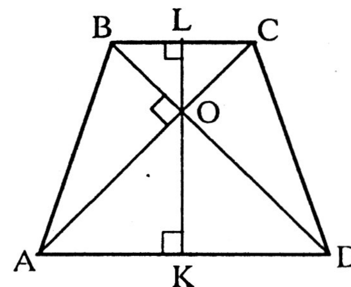
$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$ (Trapecijos plotas lygus jos įstrižainių ir sinuso kampo tarp jų sandaugos pusei)

$$S = \frac{a+b}{a-b}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-b-d)(p-b-c)}$$

Suformuluosime ir įrodysime keletą lygiašonės trapecijos savybių.*

1. Lygiašonės trapecijos, kurios įstrižainės statmenos viena kitai, plotas S lygus jos aukštinės kvadratui , t.y.

$$S = h^2$$



100 pav.

Įrodymas.

Lygiašonės trapecijos ABCD simetrijos ašis yra į trapecijos pagrindus nubrėžtas statmuo KL, einantis per įstrižainių susikirtimo tašką O (žr. 100 pav.). Statmuo KL yra ir trapecijos aukštinė ,t.y. KL=h.

Kadangi $\angle AOD = 90^0$, tai trikampis AOD yra statusis lygiašonis trikampis, o OK - šio trikampio aukštinė. Tada $\angle AKO = 90^0$. Jei OK lygiašonio trikampio AOD aukštinė, tai ji tuo pačiu metu yra ir šio trikampio kampo AOD pusiaukampinė, todėl $\angle AOK = ½\angle AOD = ½90^0 = 45^0$. Bet tada ir $\angle OAK = 45^0$. Vadinasi, trikampis AOK yra lygiašonis ir AK=OK. Kadangi AD=2AK (OK yra lygiašonio AOD pusiaukraštinė), tai **AD=2 · OK** . Analogiškai įrodoma, kad **BC=2 · OL** . Vadinasi,

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot LK = \frac{2OK+2OL}{2}LK = (OK+OL)LK = LK^2 = h^2$$

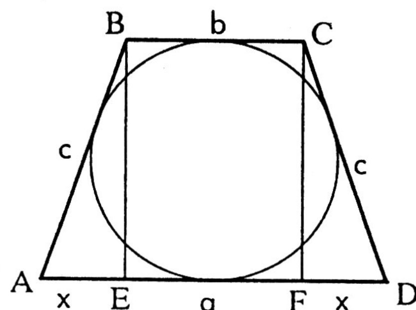
Savybė įrodyta

Pastaba. Iš įrodytos savybės išplaukia, kad lygiašonės trapecijos, kurios įstrižainės statmenos viena kitai, vidurinė linija lygi aukštinei.

*Šios savybės dažniausiai pateikiamos kaip atskiri planimetrijos uždaviniai.

> 2. Lygiašonės trapecijos, į kurią galima įbrėžti apskritimą, aukštinė lygi pagrindų geometriniam vidurkiui.

Įrodymas.



101 pav.

Sakykime, ABCD trapecija, į kurią įbrėžtas apskritimas, AB=CD=c - šoninių kraštinių ilgis, AD=a - didesniojo pagrindo ilgis, BC=c - mažesniojo pagrindo ilgis, CF=BE=h - trapecijos aukštinė (101 pav.). Kadangi apie apskritimą apibrėžto keturkampio priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios, tai a+b=2c (žr. pav.); iš čia $AB=\frac{a+b}{2}$.

Pažymėkime AE=FD=x. Tada AD=BC+2x ; iš čia $x=\frac{AD-BC}{2}$.

Taigi $AE=\frac{AD-BC}{2}=\frac{a-b}{2}$. Iš stačiojo trikampio ABE randame

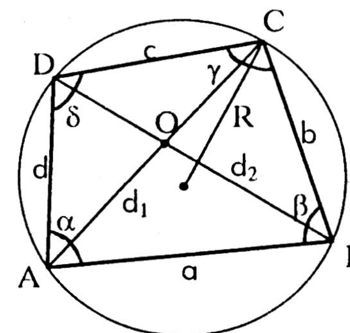
$BE^2=AB^2-AE^2$, t.y. $h^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$. Vadinasi, $h=\sqrt{ab}$

Savybė įrodyta.

• ĮBRĖŽTINIAI KETURKAMPIAI

> **Įbrėžtu į apskritimą keturkampiu (įbrėžtiniu keturkampiu)** vadinamas keturkampis, kurio visos viršūnės yra viename apskritime.

102 paveiksle keturkampis ABCD įbrėžtas į apskritimą (įbrėžtinis keturkampis). Apskritimas šiuo atveju vadinamas apibrėžtu apie keturkampį (apibrėžtiniu apskritimu).



102 pav.

Pažymėkime (žr. 102 pav.) :

a, b, c, d - įbrėžtinio keturkampio kraštinės ;

α, β, γ, δ - įbrėžtinio keturkampio vidaus kampai ;

$AC=d_1$, $BD=d_2$ - įbrėžtinio keturkampio įstrižainės ;

R - apie keturkampį apibrėžto apskritimo spindulys ;

S - įbrėžtinio keturkampio plotas .

> Apie keturkampį galima apibrėžti apskritimą tada ir tik tada, kai jo priešingų kampų suma lygi 180^0.

Vadinasi, jei keturkampis ABCD yra įbrėžtas į apskritimą (žr. 102 pav.), tai

$$\alpha + \beta + = \beta + \delta = 180^0$$

(įbrėžtinio keturkampio priešingų kampų suma lygi 180^0).

> **Ptolemėjaus teorema.** Įbrėžtinio keturkampio priešingų kraštinių sandaugų suma lygi jo įstrižainių sandaugai.

102 paveiksle pavaizduotam įbrėžtiniam keturkampiui Ptolemėjaus teorema užrašoma šitaip :

$$a c + b d = d_1 d_2$$

Įbrėžtinio keturkampio ABCD plotas

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$; čia

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}$$ - keturkampio pusperimetris

$$R = \frac{1}{4S}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} \qquad d_2 = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

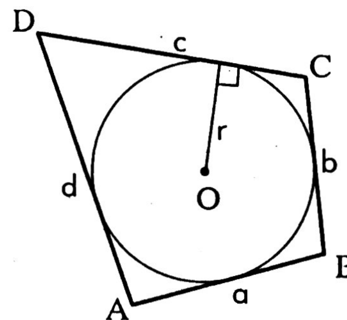
Iš visų lygiagretainių **tik apie stačiakampį ir kvadratą** galima apibrėžti apskritimą ; jo centras yra įstrižainių susikirtimo taškas.

Apie trapeciją galime apibrėžti apskritimą tik tada, kai ji yra **lygiašonė**.

• APIBRĖŽTINIAI KETURKAMPIAI

Apibrėžtu apie apskritimą keturkampiu (apibrėžtiniu keturkampiu) vadiname keturkampį, kurio visos kraštinės liečia vieną apskritimą.

103 paveiksle keturkampis ABCD apibrėžtas apie apskritimą (apibrėžtinis keturkampis). Apskritimas šiuo atveju vadinamas **įbrėžtu į keturkampį (įbrėžtiniu apskritimu)**.



103 pav.

Pažymėkime (žr. 103 pav.) :

a, b, c, d - apibrėžto keturkampio kraštinės ;

r - į keturkampį įbrėžto apskritimo spindulys ;

$p = \frac{a+b+c+d}{2}$ - keturkampio ABCD pusperimetras ;

S - apibrėžtinio keturkampio plotas.

Jei keturkampio priešingų kraštinių ilgių sumos lygios, tai į jį galima įbrėžti apskritimą.

Teisingas ir atvirkštinis teiginys .

Apibrėžtinio keturkampio priešingųjų kraštinių ilgių sumos lygios.

103 paveiksle pavaizduotam keturkampiui ABCD ta savybė taip užrašoma :

$$a + b = b + d$$

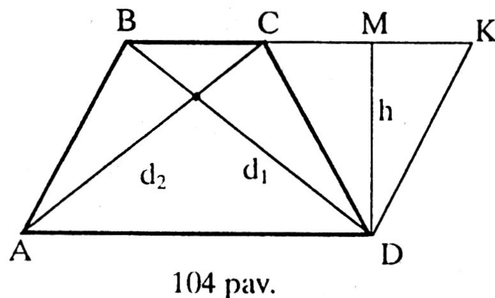
Apibrėžtinio keturkampio plotas

$$S = r \cdot p$$

Iš visų lygiagretainių tik į rombą (atskirai imant į kvadratą) galima įbrėžti apskritimą. Jo centras yra įstrižainių susikirtimo taškas.

Išspręsime keletą skyriaus "Keturkampiai" uždavinių.

1 uždavinys. Trapecijos įstrižainės lygios d_1 ir d_2, o aukštinė yra h. Rasti trapecijos plotą.



104 pav.

Sprendimas.

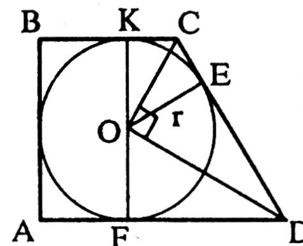
Sakykime, ABCD - trapecija, kurios įstrižainės $BD=d_1$ ir $AC=d_2$ (žr. 104 pav.). Per tašką D išveskime tiesę, lygiagrečią įstrižainei AC. Šios tiesės ir tiesės BC susikirtimo tašką pažymėkime K. Keturkampio ACKD priešingos kraštinės poromis lygiagrečios ir lygios. Vadinasi, ACKD - lygiagretainis, $DK=AC=d_2$ ir CK=AD .Iš paskutinės lygybės išplaukia, kad BK=BC+CK=BC+AD , t.y. atkarpos BK ilgis lygus trapecijos pagrindų ilgių sumai. Jei trapecijos aukštinė lygi h, tai trapecijos plotas $S=\frac{1}{2}BK\cdot h$. Tegul $DM\perp BK$, tada DM=h . Iš stačiųjų trikampių BMD ir DMK, remdamiesi Pitagoro teorema, randame atkarpų BM ir MK ilgius :

$$BM=\sqrt{BD^2-DM^2}=\sqrt{d_1^2-h^2}\ ,\ MK=\sqrt{DK^2-DM^2}=\sqrt{d_2^2-h^2}\ .$$

Vadinasi, trapecijos ABCD plotas

$$S=\frac{1}{2}BK\cdot h=\frac{1}{2}(BM+MK)h=\frac{1}{2}h\left(\sqrt{d_1^2-h^2}+\sqrt{d_2^2-h^2}\right)\ .$$

2 uždavinys. Į stačiąją trapeciją įbrėžtojo apskritimo centras nutolęs nuo šoninės kraštinės galų 9 cm ir 12 cm atstumais. Raskite trapecijos vidurinę liniją ir plotą.



105 pav.

Sprendimas.

Sakykime, į stačiąją trapeciją ABCD įbrėžtas apskritimas, kurio centras O. Iš uždavinio sąlygos OC=9 , OD=12 , $\angle BAD=90^0$ (žr. 105 pav.).

Įbrėžtinio apskritimo spindulį pažymime r, o lietimosi taškus su trapecijos ilgesniąja šonine kraštine ir ilgesniuoju bei trumpesniuoju pagrindais - atitinkamai E, F ir K. Tada OE=OF=OK=r. Remiantis dviejų apskritimo liestinių, išeinančių iš vieno taško, savybėmis, OD yra kampo EDF pusiaukampinė, o CO - kampo KCE pusiaukampinė, be to , $OE\perp CD$, $OF\perp AD$, $OK\perp BC$. Vadinasi, $\angle OCE=\frac{1}{2}\angle KCE$, $\angle ODE=\frac{1}{2}\angle EDF$ ir $\angle OCE+\angle ODE=\frac{1}{2}\angle KCE+\frac{1}{2}\angle EDF=\frac{1}{2}(\angle KCE+\angle EDF)=\frac{1}{2}180^0=90^0$, o tai reiškia, kad $\mathbf{\angle COD=90^0}$. Taigi **trikampis COD statusis**. Pagal Pitagoro teoremą $CD^2=OC^2+OD^2$; $CD=\sqrt{OC^2+OD^2}$; $CD=\sqrt{9^2+12^2}=\sqrt{225}=15$; **CD=15** . $S_{\Delta COD}=\frac{1}{2}OC\cdot OD$, o, antra vertus, $S_{\Delta COD}=\frac{1}{2}CD\cdot OE$. Sulyginę paskutiniųjų dviejų lygybių dešines puses, turime $\frac{1}{2}OC\cdot OD=\frac{1}{2}CD\cdot OE$, arba $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 12=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot OE$. Todėl **OE=7,2** .

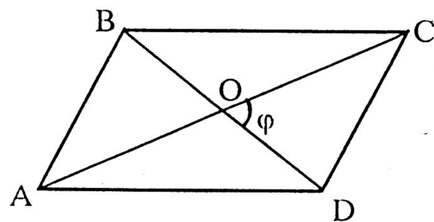
Pagal Pitagoro teoremą $CE=\sqrt{OC^2-OE^2}$; $CE=\sqrt{9^2-7{,}2^2}=5{,}4$; **CE=5,4** .Rasime trapecijų pagrindų ilgius. BC=CK+BK . Bet CK=CE=5,4, o BK=OK=OE=r=7,2 , todėl BC=5,4+7,2=12,6. AD=DF+AF . Kadangi DF=DE ,o DE=CD-CE=15-5,4=9,6 , tai DF=9,6 .Turime : AF=BK=OE=r=7,2 . Vadinasi, **AD=9,6+7,2=16,8** . Trapecijos vidurinė

linija lygi $\frac{AD+BC}{2}=\frac{16,8+12,6}{2}=14,7$ .Tada trapecijos plotas $S=\frac{AD+BC}{2}\cdot h$; čia h - trapecijos aukštinė. Kadangi h=AB=KF=2OK=2OE , tai h=2 · 7,2=14,4. Taigi S=14,7 · 14,4=211,68 cm^2.

Atsakymas. 211,68 cm^2.

Pastaba. Trapecijos vidurinę liniją $\frac{AD+BC}{2}$ galėjome surasti ir kitu būdu. Kadangi trapecija yra apibrėžta apie apskritimą, tai jos priešingų kraštinių ilgių sumos lygios , t.y. AD+BC=AB+CD .Vadinasi, trapecijos vidurinė linija lygi $\frac{AB+CD}{2}$. Bet AB=h=2OK=2OE=2 · 7,2=14,4 , o CD=15 , todėl vidurinė linija lygi $\frac{14,4+15}{2}=14,7$.

3 uždavinys. Lygiagretainio įstrižainės lygios 8 cm ir 14 cm , o kampo tarp jų kosinusas lygus $\frac{2}{7}$. Raskite lygiagretainio perimetrą.



106 pav.

Sprendimas.

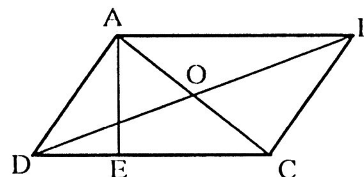
Sakykime, ABCD - lygiagretainis, kurio AC=14 cm , BD=8 cm , $\cos\varphi=\frac{2}{7}$ (žr. 106 pav.).

Pažymėkime AB=x , BC=y . Kadangi lygiagretainio kraštinių kvadratų suma lygi įstrižainių kvadratų sumai (lygiagretainio įstrižainių savybė), tai $AB^2+BC^2+AD^2+DC^2=AC^2+BD^2$. Kadangi CD=AB, o AD=BC , tai $2AB^2+2BC^2=AC^2+BD^2$. Į šią lygybę įrašę AB=x , BC=y , AC=14 , BD=8 , gauname $2x^2+2y^2=196+64$, arba

$x^2+y^2=130$. Jei O - lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas, tai OB=4 , OC=7. Pagal kosinusų teoremą $BC^2=OC^2+OB^2-2OC\cdot OB\cos\varphi$, arba $y^2=7^2+4^2-2\cdot 7\cdot 4\cdot\frac{2}{7}=49+16-16=49$. Iš čia y =7 . Todėl $x^2=130-49=81$, arba x =9. Vadinasi , P =2x+2y =32 .

Atsakymas. 32 cm.

4 uždavinys. Lygiagretainio kraštinių santykis bei jo įstrižainių santykis yra vienodas ir lygus 2. Iš bukojo kampo A viršūnės į didesniąją kraštinę CD nuleista aukštinė AE. Koks atkarpų DE ir CE ilgių santykis?



107 pav.

Sprendimas.

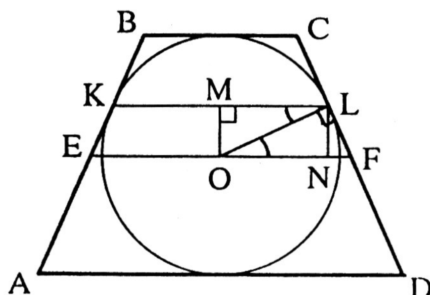
Pagal uždavinio sąlygą duotojo lygiagretainio ABCD (žr. 107 pav.) AB=2AD, BD=2AC. Kadangi lygiagretainio įstrižainio ilgių kvadratų suma yra lygi visų jo kraštinių ilgių kvadratų sumai, tai $5AC^2=10AD^2$, $AC=\sqrt{2}AD$. Iš trikampio ACD pritaikę teoremą apie kraštinės, esančios prieš smailųjį kampą, kvadratą, turime

$$AC^2=AD^2+CD^2-2CD\cdot DE\ ,$$
$$2AD^2=AD^2+4AD^2-4AD\cdot DE\ .$$

Iš šios lygybės $DE=\frac{3}{4}AD$, $EC=CD-DE=2AD-\frac{3}{4}AD=\frac{5}{4}AD$, $\frac{DE}{CE}=\frac{3}{5}$.

Atsakymas. 3 : 5 .

5 uždavinys. Apie apskritimą, kurio spindulys 10, apibrėžta lygiašonė trapecija. Atstumas tarp šoninių kraštinių lietimosi su apskritimu taškų lygus 16. Rasti trapecijos plotą.



108 pav.

Sprendimas.

1būdas. Sakykime, apie apskritimą, kurio centras O, apibrėžta lygiašonė trapecija ABCD (žr. 108 pav.). Lietimosi taškai tarp apskritimo ir trapecijos šoninių kraštinių yra K ir L. Trapecijos vidurinė linija yra atkarpa EF. Iš brėžinio matyti, kad OL - apskritimo spindulys. Kadangi spindulys statmenas į liestinę lietimosi taške, tai kampas OLF status : $\angle OLF=90^0$. Turime : ML=½ KL. Pagal sąlygą KL=16, todėl **ML=½ 16=8**. Iš stataus trikampio OLF, remdamiesi Pitagoro teorema, gauname $OM^2=OL^2-ML^2$, arba $OM^2=10^2-8^2=36$. Iš čia **OM=6**. Atkarpa LN yra stačiojo trikampio OLF aukštinė, todėl ji yra statinių OL ir LF projekcijų įžambinėje OF geometrinis vidurkis, t.y. $LN=\sqrt{ON\cdot NF}$ (1). Kadangi ON=ML=8, o LN=OM=6 (OM jau radome anksčiau), tai, surašę šias reikšmes į (1) lygybę, gauname $6=\sqrt{8\cdot NF}$, arba 36=8NF. Iš čia $NF=\frac{36}{8}=4{,}5$. Vadinasi, vidurinė linija EF=2OF=2(ON+NF) ; EF=2(8+4,5)=25 . Kadangi trapecijos aukštinė lygi įbrėžtojo į ją apskritimo skersmeniui (h=2OL), tai trapecijos plotas S=EF·h=2EF·OL ; S=2·25·10=500.

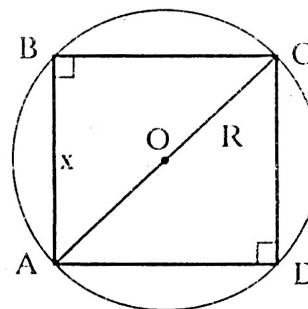
Atsakymas. 500 .

Pastaba. Trapecijos vidurinę liniją galėjome rasti ir kitu būdu. Statieji trikampiai OML ir OLF yra panašūs, nes turi po vienodą statųjį kampą

($\angle MLO=\angle LOF$). Vadinasi, minėtų trikampių atitinkamos kraštinės proporcingos. Turime: $\frac{OL}{OF}=\frac{ML}{OL}$, arba $OL^2=OF\cdot ML$. Iš čia $OF=\frac{OL^2}{ML}$. Bet OL=10 (OL - apskritimo spindulys), ML=8 (žr. uždavinio sprendimą 1-uoju būdu). Tada $OF=\frac{10^2}{8}=12{,}5$. Trapecijos vidurinė linija EF=2OF=2·12,5=25.

6 uždavinys. Iš skritulio formos plokštelės, kurios spindulys R, reikia išpjauti didžiausio ploto stačiakampį. Kokios turi būti jo kraštinės?

Sprendimas.



109 pav.

Sakykime, stačiakampis ABCD įbrėžtas į spindulio R apskritimą (109 pav.). Vieną stačiakampio kraštinę, pavyzdžiui AB, pažymėkime x : AB=x. Kadangi AO=OC=R, tai AC=2·AO=2R (stačiakmapio įstrižainė lygi apskritimo skersmeniui).

Iš stačiojo trikampio ABC, remdamiesi Pitagoro teorema, gauname $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{(2R)^2-x^2}=\sqrt{4R^2-x^2}$. Tada stačiakampio plotas S=AB··BC , t.y. $S(x)=x\sqrt{4R^2-x^2}$. Vadinasi, stačiakampio plotas yra kintamojo x funkcija. Rasime, su kuria kintamojo x reikšme funkcija S(x) įgyja didžiausią reikšmę. Kadangi $x\in[0;2R]$, tai pakanka rasti, su kuria x reikšme iš šio intervalo funkcija S(x) įgyja didžiausią reikšmę. Randame funkcijos S(x)

išvestinę : $S^{\prime}(x)=(x\cdot\sqrt{4R^2-x^2})^{\prime}=\sqrt{4R^2-x^2}-\dfrac{2x^2}{2\sqrt{4R^2-x^2}}=\dfrac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}$.

Randame kritinius taškus : $S^{\prime}(x)=0$, $\dfrac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=0 \iff \begin{cases}4R^2-2x^2=0,\\ x\neq 2R.\end{cases}$

$4R^2-2x^2=0$, t.y. $x=\pm\sqrt{2}R$.

Reikšmė $x=-\sqrt{2}R$ intervalui $[0;2R]$ nepriklauso, todėl jos nenagrinėsime. Vadinasi, ploto funkcija turi vieną mus dominantį kritinį tašką $x=\sqrt{2}R$. Rasime funkcijos S(x) reikšmes atkarpos $[0;2R]$ galuose bei kritiniame taške $x=\sqrt{2}R$. Turime :

$$S(0)=0\ ,\ S(R)=R\sqrt{4R^2-R^2}=R\sqrt{3R^2}=R^2\sqrt{3}$$

$$S(\sqrt{2}R)=\sqrt{2}R\sqrt{4R^2-2R^2}=\sqrt{2}\cdot R\cdot\sqrt{2}\cdot R=2R^2.$$

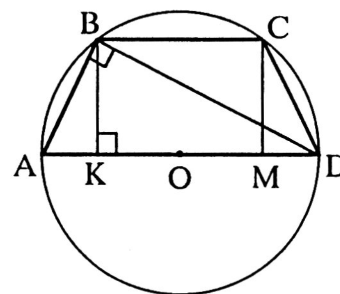
Matome, kad ploto funkcija S(x) didžiausią reikšmę atkarpoje $[0;2R]$ įgyja, kai $x=\sqrt{2}R$. Vadinasi, iš visų stačiakampių , įbrėžtų į duotojo spindulio R apskritimą, didžiausią plotą turi stačiakampis, kurio viena kraštinė lygi $x=\sqrt{2}R$, o kita $AD=\sqrt{4R^2-x^2}=\sqrt{4R^2-(\sqrt{2}R)^2}=\sqrt{2}R$. Taigi $AB=AD=\sqrt{2}R$, t.y. ABCD - kvadratas.

Atsakymas. Visos keturios kraštinės lygios $\sqrt{2}R$.

7 uždavinys. Į spindulio R apskritimą įbrėžta trapecija, kurios pagrindas yra pusapskritimio skersmuo. Kokia turi būti trapecijos šoninė kraštinė, kad trapecijos perimetras būtų didžiausias? Rasti šį perimetrą.

Sprendimas. Sakykime, į spindulio R apskritimą įbrėžta trapecija ABCD, kurios ilgesnysis pagrindas AD yra skritulio skersmuo (110 pav.).

Kadangi apie trapeciją ABCD apibrėžtas apskritimas, tai ji yra lygiašonė (prisiminkime, kad apie trapeciją galima apibrėžti apskritimą tik tada, kai ji yra lygiašonė). Pažymėkime AB=CD=x . Išreikškime trapecijos perimetrą P per apskritimo spindulį R ir šoninę kraštinę x. Kadangi OA=OD=R, tai AD=2R. Iš viršūnių B ir C nuleiskime statmenis BK ir CM į trapecijos pagrindą AD. Tada AK=MD , BC=KM , AD=2AK+BC .



110 pav.

Iš paskutinės lygybės $AK=\dfrac{AD-BC}{2}$, $AK=\dfrac{2R-BC}{2}$. Kadangi kampas ABD remiasi į skersmenį, tai $\angle ABD=90^0$. Iš stačiojo trikampio ABD statinį AB išreikškime per įžambinę AD ir jo projekciją AK įžambinėje. Turime :

$AB^2=AD\cdot AK$, t.y. $x^2=2R\left(\dfrac{2R-BC}{2}\right)$. Iš pastarosios lygybės $BC=\dfrac{2R^2-x^2}{R}$.

Trapecijos perimetras :

$$P=AB+CD+AD+BC=2AB+AD+BC=2x+2R+BC.$$

Į šią lygybę įrašę anksčiau gautą BC išraišką, turime :

$$P=2x+2R+\frac{2R^2-x^2}{R}=\frac{-x^2+2Rx+4R^2}{R}.$$

Kadangi gautosios trupmenos vardiklis yra pastovus dydis, tai didžiausią reikšmę ši trupmena (o kartu ir perimetras) įgyja, kai skaitiklyje esantis kvadratinis trinaris įgyja didžiausią reikšmę. Skaitiklyje išskyrę pilnąjį kvadratą, turime $P=\dfrac{5R^2-(x-R)^2}{R}$. Aišku, kad skaitiklis, o kartu ir visa trupmena, įgyja didžiausią reikšmę, kai x=R. Vadinasi, iš visų į apskritimą įbrėžtų trapecijų, kurių pagrindas yra pusapskritimio skersmuo, didžiausią perimetrą turi ta, kurios šoninė kraštinė lygi apskritimo spinduliui R. Tokios trapecijos perimetras lygus $P=\dfrac{5R^2}{R}=5R$.

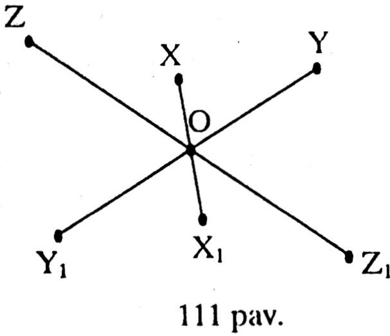
9.FIGŪRŲ TRANSFORMACIJOS

•

Sakoma, kad nauja figūra yra gauta, transformuojant duotąją, jei kiekvieną duotos figūros tašką kokiu nors būdu perkeliame.

• **Figūrų transformacijų pavyzdžiai :**

1. SIMETRIJA TAŠKO ATŽVILGIU (CENTRINĖ SIMETRIJA).



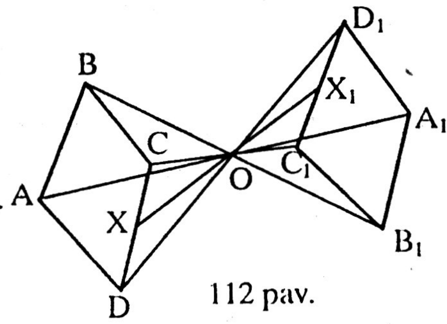
111 pav.

Tarkime, kad O - fiksuotas plokštumos taškas, o X - bet kuris plokštumos taškas. (žr. 37 pav.)

Tašką X_1 vadiname **simetrišku** taškui X taško O atžvilgiu,jei taškai X, O, X_1 yra vienoje tiesėje ir $OX=OX_1$ (žr. 111 pav.)

Taškas, simetriškas taškui O, yra pats taškas O. 111 paveiksle taškai X ir X_1, Y ir Y_1, Z ir Z_1 simetriški vienas kitam taško O atžvilgiu.

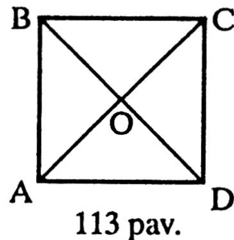
Tarkime, kad F - duota figūra ir O - fiksuotas plokštumos taškas.



112 pav.

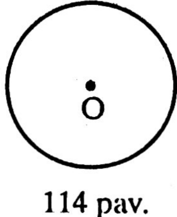
Figūros F transformacija į figūrą F_1, kuri kiekvieną figūros F tašką X perveda į tašką X_1, simetrišką taško O atžvilgiu, vadiname **simetrija (arba simetrijos transformacija) taško O atžvilgiu.**

112 paveiksle pavaizduotas keturkampis $A_1B_1C_1D_1$simetriškas keturkampiui ABCD centro O atžvilgiu.



113 pav.

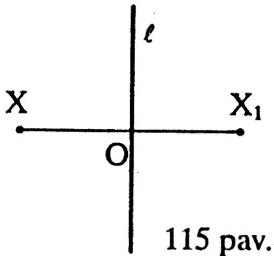
Figūrą F vadiname **simetriška centro O atžvilgiu,** o tašką O - **simetrijos centru,** jei simetrijos transformacija taško O atžvilgiu figūrą F perveda į ją pačią.



114 pav.

Pavyzdžiui, kvadratas yra figūra, simetriška centro atžvilgiu. Jo simetrijos centras yra įstrižainių susikirtimo taškas (113 pav.). Apskritimas, kurio centras O, taip pat yra simetriškas centro O atžvilgiu (114 pav.).

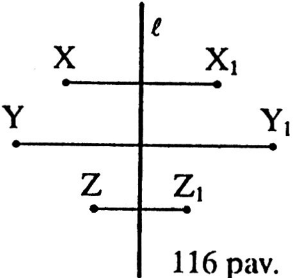
2. SIMETRIJA TIESĖS ATŽVILGIU (AŠINĖ SIMETRIJA).



115 pav.

Tarkime, kad ℓ - fiksuota tiesė.

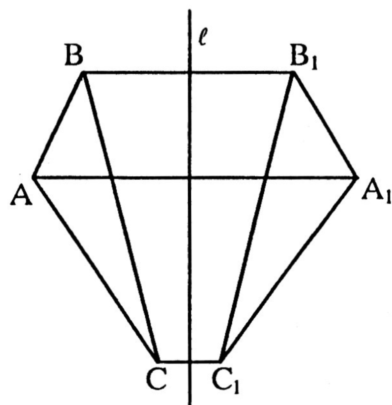
Tašką X_1 vadiname **simetrišku** taškui X tiesės ℓ atžvilgiu, jei tiesė XX_1 statmena tiesei ℓ ir $OX_1=OX$; čia O - tiesių XX_1 ir ℓ susikirtimo taškas (115 pav.).



116 pav.

Jei taškas X priklauso tiesei ℓ, tai jam simetriškas yra pats taškas X. Taškas simetriškas taškui X_1, yra taškas X.

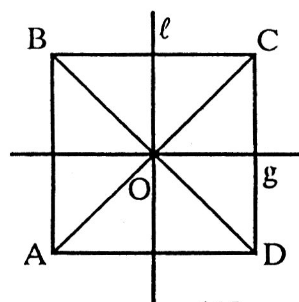
116 paveiksle taškai X ir X_1, Y ir Y_1, Z ir Z_1 simetriški tiesės ℓ atžvilgiu.



117 pav.

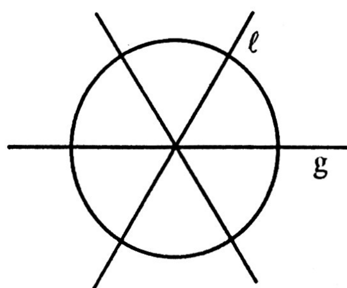
Simetrijos transformacija (arba **simetrija) tiesės ℓ atžvilgiu** vadiname tokią figūros F transformaciją į figūrą F_1, kuri kiekvieną figūros F tašką X perveda į tašką X_1, simetrišką tiesės ℓ atžvilgiu.

Figūros F ir F_1 vadiname **simetriškomis tiesės ℓ atžvilgiu.** 117 paveiksle pavaizduoti du trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$, simetriški tiesės ℓ atžvilgiu.



118 pav.

Figūrą F vadiname **simetriška tiesės ℓ atžvilgiu,** jei simetrija tiesės ℓ atžvilgiu figūrą F perveda į ją pačią. Tiesę ℓ vadiname figūros F **simetrijos ašimi.**

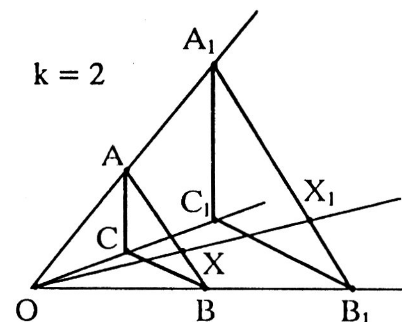


119 pav.

Pavyzdžiui, kvadrato simetrijos ašys yra tiesės, einančios per kvadrato įstrižainių susikirtimo tašką ir lygiagrečios jo kraštinėms (žr. 118 pav.). Apskritimas simetriškas kiekvienos per jo centrą einančios tiesės atžvilgiu (žr. 119 pav.).

3. HOMOTETIJA.

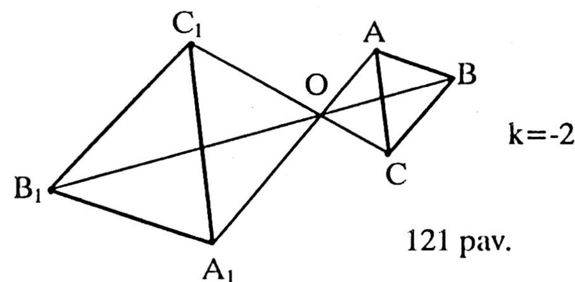
Tarkime, kad F - duota figūra, O - fiksuotas taškas (120 pav.). Per bet kurį figūros F tašką X nubrėžiame spindulį OX ir jame atidedame atkarpą OX_1, lygią $k \cdot OX$ (k - nelygus nuliui skaičius).



120 pav.

Figūros F transformaciją, kuria kiekvienas jos taškas X nurodytu būdu pervedamas į tašką X_1, **vadiname homotetija centro O atžvilgiu.**

Skaičių k vadiname **homotetijos koeficientu.** Homotetija su centru O ir koeficientu k žymima H^k_o. Figūros F ir F_1 vadiname **homotetiškomis.** 120 paveiksle trikampis $A_1B_1C_1$ homotetiškas trikampiui ABC centro O atžvilgiu ; homotetijos koeficientas k=2. Rašome : $\Delta A_1B_1C_1=H_o^2$ (ΔABC). 121 paveiksle trikampis $A_1B_1C_1$ homotetiškas trikampiui ABC centro O atžvilgiu ; homotetijos koeficientas šiuo atvėju $k=-2<0$. Rašome : $\Delta A_1B_1C_1=H_o^{-2}$ (ΔABC).



121 pav.

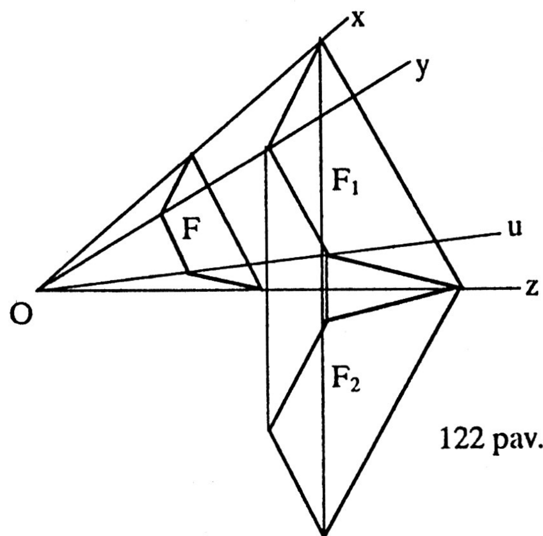
4. PANAŠUMO TRANSFORMACIJA.

Panašumo transformacija vadiname figūros transformaciją į kitą figūrą, kuri atstumus tarp taškų keičia (didina arba mažina) vienodą skaičių kartų. Tai reiškia, jog bet kurie figūros F taškai X ir Y, atlikus panašumo transformaciją, pereina į tokius figūros F_1 taškus X_1 ir Y_1, kad $X_1Y_1=kXY$.

Skaičių k vadiname **panašumo koeficientu.**

Homotetija yra panašumo transformacija.

Tačiau ne kiekviena panašumo transformacija yra homotetija. 122 paveiksle figūra F_1 gauta iš figūros F, atlikus homotetiją, o figūra F_2 gauta iš figūros F_1, atlikus simetriją OZ ašies atžvilgiu. Figūros F transformacija į figūrą F_2 yra panašumo transformacija, nes ji nekeičia atstumų tarp atitinkamų taškų santykių, bet tai nėra homotetija.



122 pav.

Panašumo transformacijos savybės.

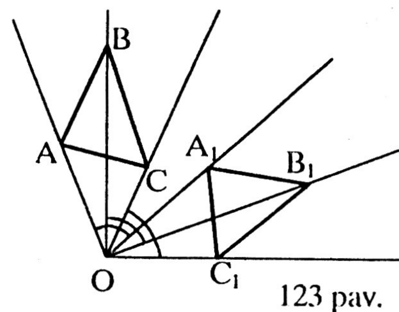
1. Panašumo transformacija tris taškus A, B, C, priklausančius vienai tiesei, perveda į tris taškus A_1, B_1, C_1, irgi priklausančius vienai tiesei. Be to, jei taškas B yra tarp taškų A ir C, tai taškas B_1 yra tarp taškų A_1 ir C_1.
2. Panašumo transformacija tieses perveda į tieses, pustieses - į pustieses, atkarpas - į atkarpas.
3. Panašumo transformacija nekeičia kampų tarp pustiesių.

5. POSŪKIS APIE TAŠKĄ.

Figūros F **posūkiu apie tašką** vadinama tokia figūros F transformacija, kuria kiekvienas spindulys, išeinantis iš taško, pasukdamas apie minėtą tašką tuo pačiu kampu ir ta pačia kryptimi (pagal laikrodžio rodyklę arba prieš laikrodžio rodyklę).

123 paveiksle pavaizduotas trikampis $A_1B_1C_1$, gautas iš trikampio ABC, pasukus pastarąjį apie tašką O 60^0 kampu pagal laikrodžio rodyklę. Kampai tarp spindulių OA ir OA_1, OB ir OB_1, OC ir OC_1 lygūs 60^0.

Svarbu pabrėžti, kad posūkis apie tašką nekeičia atstumo tarp taškų.



123 pav.

Nagrinėtame pavyzdyje $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$ (žr. 123 pav.).

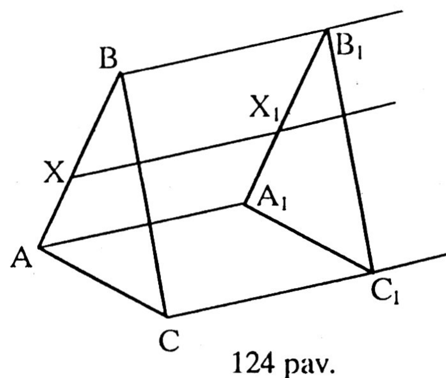
6. LYGIAGRETUSIS POSTŪMIS

Lygiagrečiuoju postūmiu vadinama figūros F transformacija, kuria kiekvienas figūros F taškas X atvaizdduojamas į tokį tašką X_1, kad :

1) visi spinduliai XX_1 yra vienakrypčiai ;
2) visos atkarpos XX_1 yra vienodo ilgio (žr. 124 pav.).

Iš lygiagrečiojo postūmio apibrėžimo seka, kad lygiagrečiuoju postūmiu visi figūros F taškai pasislenka viena ir ta pačia kryptimi, vienu ir tuo pačiu atstumu.

Spindulio XX_1 nusakyta kryptis vadinama **lygiagrečiojo postūmio kryptimi**, o atkarpos XX_1 ilgis - **lygiagrečiojo postumio moduliu.**



124 pav.

124 paveiksle pavaizduotas trikampis $A_1B_1C_1$ yra gautas iš trikampio ABC pastūmus kiekvieną pastarojo tašką spindulio XX_1 kryptimi atstumu, lygiu atkarpos XX_1 ilgiui , t.y. atlikus lygiagretųjį postūmį. Lygiagretusis postūmis trikampį ABC perveda į jam lygų trikampį $A_1B_1C_1$.

Lygiagrečiojo postūmio savybės .

1. Lygiagretusis postūmis nekeičia atstumo .

2. Lygiagrečiuoju postūmiu kiekvienas spindulys atvaizduojamas į vienakryptį su juo spindulį.

3. Postūmio krypčiai lygiagreti tiesė atvaizduojama į ją pačią. Kiekviena kita tiesė atvaizduojama į jai lygiagrečią tiesę.

• ATVIRKŠTINĖ TRANSFORMACIJA

Sakykime, figūros F transformacija į figūrą F_1 skirtingus figūros F taškus perveda į skirtingus figūros F_1 taškus. Tarkime, kad bet kuris figūros F taškas X, atliekant šią transformaciją, pereina į figūros F_1 tašką X_1. Figūros F_1 transformacija į figūrą F, kuri tašką X_1 perveda į tašką X, vadiname **atvirkštine pradinei transformacijai.**

Pavyzdžiui, homotetijai, kurios koeficientas k, atvirkštinė transformacija yra homotetija, kurios centras tas pats, o koeficientas lygus $\frac{1}{k}$.

• JUDESYS.

Judesiu vadiname figūros F transformaciją į figūrą F_1, kuri nekeičia atstumo tarp taškų, t.y. bet kuriuos figūros F taškus X ir Y perveda į tokius figūros F_1 taškus X_1 ir Y_1, kad $XY=X_1Y_1$.

Simetrijos transformacija taško atžvilgiu yra judesys.

Simetrijos transformacija tiesės atžvilgiu yra judesys.

Kai k=1 , panašumo transformacija yra judesys.

Posūkis apie tašką yra judesys.

Lygiagretusis postūmis yra judesys.

Užrašysime keletą judesio savybių :

1) Judesys tiesės taškus perveda į tiesės taškus, nekeisdamas jų tarpusavio padėties.

Tai reiškia, kad tiesės taškai A, B, C pereina į taškus A_1, B_1, C_1, priklausančius vienai tiesei. Be to, jei taškas B yra tarp taškų A ir C, tai taškas B_1 yra tarp taškų A_1 ir C_1.

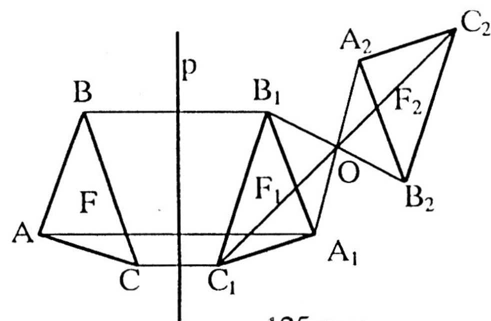
Vadinasi, judesys tieses perveda į tieses, pustieses - į pustieses, atkarpas - į atkarpas.

2) Judesys nekeičia kampų tarp pustiesių.

3) Du vienas po kito atliekami judesiai sudaro judesį.

Šių judesių atlikimo rezultatas vadinamas **judesių kompozicija.**

4) Judesiui atvirkštinė transformacija irgi yra judesys.



125 pav.

Trečiąją judesio savybę iliustruosime pavyzdžiu.

125 paveiksle pavaizduoti du vienas po kito atliekami judesiai : figūra F_1 gauta iš figūros F, atlikus simetriją ašies p atžvilgiu, o figūra F_2 gauta iš figūros F_1, atlikus simetriją taško O atžvilgiu.

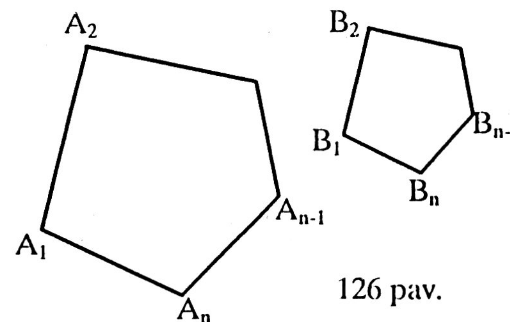
Taip atlikus figūros F transformaciją į figūrą F_2, nepakito atstumai tarp atitinkamų taškų : $AB=A_2B_2$, $BC=B_2C_2$, $AC=A_2C_2$. Vadinasi, abiejų minėtų judesių kompozicija irgi yra judesys. Figūra F_2 gauta iš figūros F_1 judesio pagalba.

10. PANAŠIEJI DAUGIAKAMPIAI

Panašiomis figūromis vadiname figūras, kurias panašumo transformacija perveda vieną į kitą.

Figūrų panašumui žymėti vartojamas ženklas "~". Jei figūra F_1 panaši į figūrą F, tai rašome : $F_1 \sim F$.

Du daugiakampiai vadinami **panašiaisiais,** jeigu jų atitinkami kampai yra lygūs, o atitinkamos kraštinės proporcingos.



126 pav.

126 paveiksle pavaizduoti panašieji daugiakampiai $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ ir $B_1B_2...B_{n-1}B_n$. Daugiakampio $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ kraštinės yra $A_1A_2,...,A_{n-1}A_n,A_nA_1$, o daugiakampio $B_1B_2...B_{n-1}B_n$ kraštinės yra $B_1B_2,...,B_{n-1}B_n,B_nB_1$. Pagal panašiųjų daugiakampių apibrėžimą, jeigu $A_1A_2...A_n \sim B_1B_2...B_n$, tai

$$\angle A_1=\angle B_1,\ \angle A_2=\angle B_2,\ ...,\ \angle A_n=\angle B_n$$

ir

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=...=\frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_1}=\frac{A_nA_1}{B_nB_1}=k$$

; čia

k - panašumo koeficientas .

Panašiųjų daugiakampių perimetrų santykis lygus tų daugiakampių panašumo koeficientui.

126 paveiksle pavaizduotiems panašiesiems daugiakampiams ši savybė užrašoma šitaip :

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \ldots = \frac{A_nA_1}{B_nB_1} = k$$; čia

P_A - daugiakampio $A_1A_2 \ldots A_n$ perimetras, o

P_B - daugiakampio $B_1B_2 \ldots B_n$ perimetras.

Panašiųjų daugiakampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.

126 paveiksle pavaizduotiems panašiesiems daugiakampiams ši savybė užrašoma šitaip :

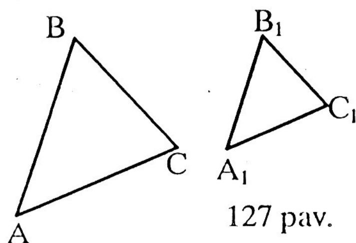
$$\frac{S_A}{S_B} = \left(\frac{A_1A_2}{B_1B_2}\right)^2 = \ldots = \left(\frac{A_nA_1}{B_nB_1}\right)^2 = k^2$$; čia

S_A - daugiekampio $A_1A_2 \ldots A_n$ plotas, o

S_B - daugiakampio $B_1B_2 \ldots B_n$ plotas.

Sprendžiant uždavinius, dažnai tenka susidurti su trikampių panašumu. Toliau nagrinėsime trikampių panašumą.

Du **trikampiai panašūs**, kai jų atitinkami kampai lygūs, o atitinkamos kraštinės proporcingos.



127 pav.

127 paveiksle pavaizduoti panašieji trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ .Rašome : $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Kai trikampis ABC panašus į trikampį $A_1B_1C_1$, tai

$$\angle A = \angle A_1 ,\ \angle B = \angle B_1 ,\ \angle C = \angle C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$$

čia k - panašumo koeficientas

127 paveiksle pavaizduotiems panašiesiems trikampiams ABC ir $A_1B_1C_1$ panašumo koeficientas k=2 ,t.y. kiekviena trikampio ABC kraštinė yra du kartus ilgesnė už atitinkamą trikampio $A_1B_1C_1$ kraštinę.

Suformuluosime trikampio panašumo požymius .

(*Pirmas trikampių panašumo požymis*). Jei vieno trikampio dvi kraštinės proporcingos kito trikampio dviem kraštinėms ir kampai tarp tų kraštinių lygūs, tai tokie trikampiai yra panašūs. (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų).

(*Antras trikampių panašumo požymis*). Jei vieno trikampio du kampai lygūs kito trikampio dviem kampams, tai tokie trikampiai yra panašūs (pagal du kampus).

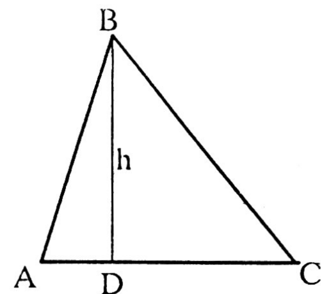
(*Trečias trikampių panašumo požymis*). Jei vieno trikampio trys kraštinės yra proporcingos kito trikampio trims kraštinėms, tai tokie trikampiai yra panašūs (pagal tris kraštines).

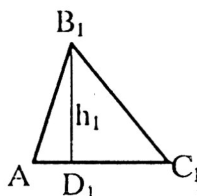
Suformuosime stačiųjų trikampių panašumo požymius.

Du statieji trikampiai panašūs :

1) jeigu jie turi po vienodą lygų smailųjį kampą ;

2) Jeigu vieno stačiojo trikampio statiniai proporcingi kito statiniams ;





128 pav.

3) jeigu vieno įžambinė ir statinis yra proporcingi kito įžambinei ir statiniui.

Jei $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (žr. 128 pav.) ir

AB, BC, AC - trikampio ABC kraštinės,

A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1 - trikampio $A_1B_1C_1$ kraštinės.

$P_{\Delta ABC}$ - trikampio ABC perimetras,

$P_{\Delta A1B1C1}$ - trikampio $A_1B_1C_1$ perimetras,

h - trikampio ABC aukštinė,

h_1 - trikampio $A_1B_1C_1$ aukštinė,

$S_{\Delta ABC}$ - trikampio ABC plotas,

$S_{\Delta A1B1C1}$ - trikampio $A_1B_1C_1$ plotas.

Tada teisingos lygybės :

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{h}{h_1}$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{h}{h_1}\right)^2$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{R}{R_1}$$; čia

r - į trikampį ABC įbrėžto apskritimo spindulys ,

r_1 - į trikampį $A_1B_1C_1$ įbrėžto apskritimo spindulys ,

R - apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo spindulys ,

R_1 - apie trikampį $A_1B_1C_1$ apibrėžto apskritimo spindulys ,

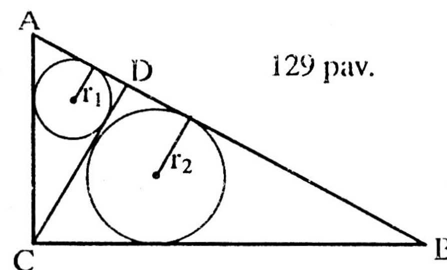
Paskutinioji lygybė išreiškia tokią **panašiųjų trikampių savybę** :

Jei trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra panašūs, tai į šiuos trikampius įbrėžtų apskritimų (taip pat ir apibrėžtų apskritimų) spindulių santykis lygus atitinkamų kraštinių ilgių santykiui.

* * *

Išspręsime keletą uždavinių.

1 uždavinys. Statčiajame trikampyje ABC iš stačiojo kampo viršūnės C išvesta aukštinė CD (žr. pav.). Į trikampį ACD įbrėžto apskritimo spindulys lygus r_1, o trikampį BCD įbrėžto apskritimo spindulys lygus r_2. Rasti į trikampį ABC įbrėžto apskritimo spindulį (129 pav.).



129 pav.

Sprendimas.

Ieškomąjį spindulį pažymėkime r. Sakykime, $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$.

Kadangi statieji trikampiai ACD ir ABC panašūs (turi po lygų kampą prie viršūnės A), tai į juos įbrėžtų apskritimų spindulių santykis lygus atitinkamų kraštinių santykiui.

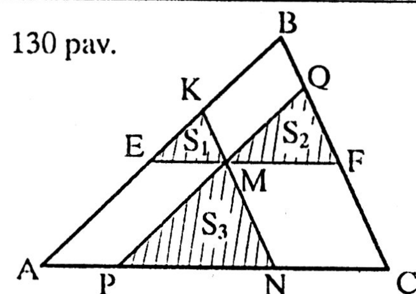
Taigi $\frac{r}{r_1} = \frac{c}{b}$, iš čia $b = \frac{r_1}{r}c$. Statieji trikampiai CBA ir ABC taip pat panašūs, todėl $\frac{r}{r_2} = \frac{c}{a}$, iš čia $a = \frac{r_2}{r}c$.

Kadangi pagal Pitagoro teoremą $a^2+b^2=c^2$, tai, pakėlę kvadratu anksčiau gautas statinių a ir b išraiškas ir sudėję jas, gauname

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 c^2+\left(\frac{r_2}{r}\right)^2 c^2=c^2 \text{ , arba } \frac{r_1^2+r_2^2}{r^2}=1 \text{ .}$$

Iš paskutiniosios lygybės randame $r=\sqrt{r_1^2+r_2^2}$.

2 uždavinys. Per tašką M, esantį trikampio ABC viduje, išvestos trys tiesės, lygiagrečios jo kraštinėms. Susidarė trys trikampiai (jie 130 paveiksle subrūkšniuoti), kurių plotai lygūs S_1, S_2 ir S_3. Rasti trikampio ABC plotą.



Sprendimas.

Trikampiai EKM ir ABC yra panašūs (130 pav.). Panašūs taip pat yra ir trikampiai MQF ir ABC bei PMN ir ABC. Jeigu S - trikampio ABC plotas, tai

$$\frac{S_1}{S}=\frac{EM^2}{AC^2} \text{ , } \frac{S_2}{S}=\frac{MF^2}{AC^2} \text{ , } \frac{S_3}{S}=\frac{PN^2}{AC^2}$$

Iš šių lygybių randame

$$EM=\sqrt{\frac{S_1}{S}}AC \text{ , } MF=\sqrt{\frac{S_2}{S}}AC \text{ , } PN=\sqrt{\frac{S_3}{S}}AC \text{ .}$$

Kadangi $EM=AP$, $MF=NC$, tai

$$EM+PN+MF=AP+PN+NC=AC.$$

Vadinasi,

$$AC\left(\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}\right)=AC \text{ .}$$

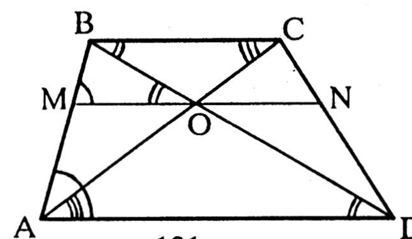
Iš čia

$$S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2 \text{ .}$$

3. uždavinys. Tiesė, einanti per trapecijos įstrižainių susikirtimo tašką ir lygiagreti jos pagrindams, kerta trapecijos šonines kraštines taškuose M ir N. Rasti atkarpos MN ilgį, jeigu trapecijos pagrindai yra a ir b.

Sprendimas.

Tegul trapecijos ABCD įstrižainės kertasi taške O, atkarpa MN lygiagreti pagrindams ir eina per tašką O (žr. 131 pav.), $AD=a$, $BC=b$. Jeigu dvi



131 pav.

lygiagrečios tiesės perkirstos trečiąja, tai atitinkamieji bei išorės priešiniai kampai lygūs. Trapecijos pagrindai lygiagretūs (yra lygiagrečiose tiesėse), o juos kertančios tiesės yra AC ir BC, todėl $\angle BDA=\angle CBD$ ir $\angle CAD=\angle BCA$. Pagal antrąjį trikampių panašumo požymį $\Delta BOC \sim \Delta DOA$ (trikampiai BOC ir DOA turi po du lygius kampus $\angle CBO=\angle ODA$, $\angle BCO=\angle OAD$). Vadinasi,

$$\frac{BO}{OD}=\frac{BC}{AD} \text{ , t.y. } \frac{BO}{OD}=\frac{b}{a} \text{ .}$$

Pasinaudoję pastarąja lygybe, randame, kad

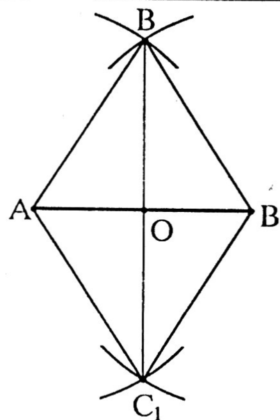
$$\frac{BO}{BD}=\frac{BO}{BO+OD}=\frac{b}{a+b} \text{ . (1)}$$

Tiesė MN lygiagreti pagrindui AD, todėl $\angle BMO=\angle BAD$ ir $\angle BOM=\angle BDA$. Vadinasi, trikampiai MBO ir ABD taip pat panašūs ir todėl $\frac{MO}{AD}=\frac{BO}{BD}$ .Iš čia, atsižvelgę į (1) lygybę gauname $MO=\frac{ab}{a+b}$. Analogiškai randame, kad $NO=\frac{ab}{a+b}$. Taigi $MN=MO+ON=\frac{2ab}{a+b}$.

11. PAPRASČIAUSIEJI BRĖŽIMO UŽDAVINIAI

Visuose uždaviniuose naudosimės tik dviem braižymo įrankiais - **liniuote ir skriestuvu.**

1 uždavinys. Padalykime duotąją atkarpą pusiau



132 pav.

Reikia rasti 132 paveiksle pavaizduotos atkarpos AB vidurį O. Brėžimas (žr. 132 pav.)

1) Iš taškų A ir B nubrėžiame du spindulio $R > \frac{1}{2} AB$ (tokį spindulį nesunku pasirinkti "iš akies") apskritimus. Taškai A ir B yra minėtų apskritimų centrai.

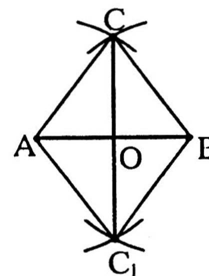
2) Pažymime apskritimų susikirtimo taškus C ir C_1.

3) Per taškus C ir C_1 nubrėžiame atkarpą CC_1. Taškai C ir C_1 yra skirtinguose pusplokštumėse, todėl atkarpa CC_1 kerta AB.

4) Atkarpų CC_1 ir AB susikirtimo taškas O ir yra atkarpos AB vidurio taškas.

Įrodymas seka iš trikampių lygumo : $\Delta CAC_1 = \Delta CBC_1$ (trikampių lygumo požymis pagal tris kraštines) , $\Delta ACO = \Delta BCO$ (trikampių lygumo požymis pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų).

2 uždavinys. Nubrėžti tiesę, statmeną duotajai atkarpai ir einančią per jos vidurį (atkarpos vidurio statmens radimo uždavinys).



54 pav.

Sprendimas analogiškas 1 uždavinio sprendimui. Tiesė CC_1 (žr. 54 pav.) ir yra ieškomoji tiesė.

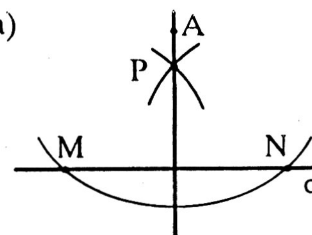
3. uždavinys. Per duotąjį tašką A nubrėžkite tiesę, statmeną duotajai tiesei a (statmens tiesei brėžimo uždavinys).

Sakykime, duotasis taškas yra A, o duotoji tiesė yra a . Galimi du atvejai :

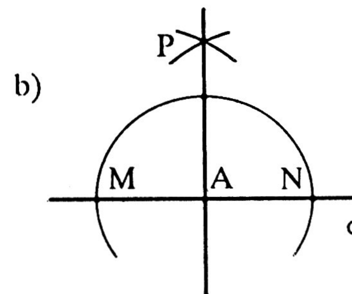
a) taškas A nepriklauso tiesei a ($A \notin a$) (žr. 134 pav., a) ;

b) taškas A priklauso tiesei a ($A \in a$) (žr. 134 pav., b).

a)



b)



134 pav.

Tiesės, statmenos duotajai tiesei ir einančios per tašką A, brėžimas abiem atvejais gali būti vienodas (žr. 134 pav., a,b).

1) Brėžiame apskritimą, kurio centras yra taške A, o spindulys R toks , kad apskritimas kirstų tiesę a.

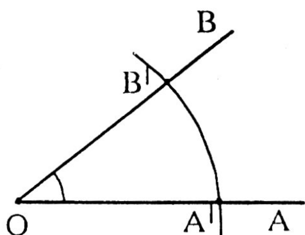
2) Pažymime apskritimo ir tiesės a susikirtimo taškus M ir N.

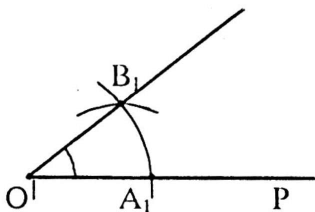
3) Iš taškų M ir N, kaip iš centrų, brėžiame vienodo spindulio r ($r > \frac{1}{2}$ MN) apskritimus.

4) Pažymime 3) etape nubraižytų dviejų apskritimų susikirtimo tašką P.

5) Tiesė AP - ieškomasis statmuo.

<u>4 uždavinys.</u> Nubraižykite kampą, lygų duotam kampui (kampo, lygaus duotajam, atidėjimo uždavinys).





135 pav.

Tarkime, kad $\angle AOB$ - duotas kampas, $O^{I}P$ - duota pustiesė (135 pav.). Sakykime, $O^{I}P$ - viena ieškomojo kampo kraštinė. Ji gali būti duota. Gali būti nurodyta tik kampo viršūnė (tada brėžtume bet kokį spindulį, išeinantį iš taško O^{I}).

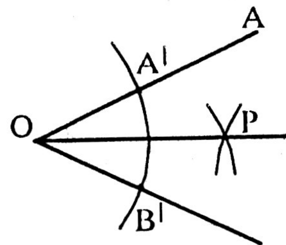
<u>Brėžimas (žr. 135 pav.).</u>

1) Iš centro O brėžiame bet kurio spindulio R apskritimą. Pažymime apskritimo ir duotojo kampo kraštinių OA ir OB susikirtimo taškus A^{I} ir B^{I}.

2) Iš centro O^{I} brėžiame to paties spindulio R (kaip ir 1) brėžimo etape braižyto apskritimo) apskritimą. Pažymime šio apskritimo ir pustiesės $O^{I}P$ susikirtimo tašką A_1.

3) Iš centro A_1 brėžiame spindulio $A^{I}B^{I}$ apskritimą. Pažymime šio apskritimo ir 2) etape nubraižyto apskritimo susikirtimo tašką B_1. Pustiesė $O^{I}B_1$ yra ieškomojo kampo antroji kraštinė, o kampas $A_1O^{I}B_1$ - ieškomasis.

<u>5. uždavinys.</u> Nubrėžkite duoto kampo pusiaukampinę.



136 pav.

Sakykime, kampas AOB duotasis (136 pav.). Nubražykime kampo AOB pusiaukampinę.

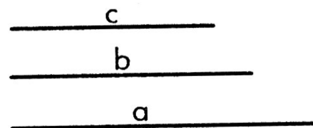
<u>Brėžimas (žr. 136 pav.).</u>

1) Iš centro O brėžiame bet kurio spindulio R apskritimą ir pažymime jo ir kampo kraštinių susikirtimo taškus A^{I} ir B^{I} (žr. 57 pav.).

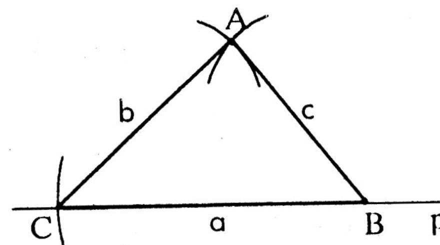
2) Iš centrų A^{I} ir B^{I} brėžiame vienodo spindulio R_1($R_1 > \frac{1}{2}A^{I}B^{I}$) apskritimus. Pašymime jų susikirtimo tašką P.

3) Tašką P sujungiame su tašku O. Pustiesė OP - kampo AOB pusiaukampinė

<u>6. uždavinys.</u> Nubraižykite trikampį, kai duotos jo kraštinės.



Sakykime, a, b ir c - duotos trikampio kraštinės (žr. 137 pav.).



137 pav.

<u>Brėžimas</u> (137pav.).

1) Nubrėžiame kurią nors tiesę p ir joje laisvai pasirenkame tašką B.

2) Iš centro B spinduliu R_1=a brėžiame apskritimą.

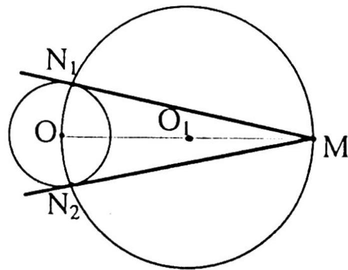
Pažymime apskritimo ir tiesės p susikirtimo tašką C.

3) Iš centrų B ir C brėžiame

apskritimus : iš centro B brėžiame apskritimą spinduliu $R_2=c$, o iš centro C - spinduliu $R_3=b$. Pažymime šių apskritimų susikirtimo tašką A.

4) Taškus A, B ir C sujungiame tiesių atkarpomis . Gauname ieškomąjį trikampį ABC, kurio kraštinės lygios $BC=a$, $AC=b$ ir $AB=c$ (žr. 137 pav.). Kad uždavinys turėtų sprendinį, trikampio kraštinės a, b ir c turi tenkinti sąlygas $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$ (žr. skyrelį "Trikampiai").

7 uždavinys. Per tašką M, nepriklausantį apskritimui, reikia nubrėžti apskritimo liestinę (apskritimo liestinės brėžimo aždavinys).



138 pav.

Sakykime duotas apskritimas, kurio centras yra taškas O. Pasirinkime apskritimui nepriklausantį tašką M (žr. 138 pav.). Nubrėžiame apskritimo liestines, einančias per tašką M.

<u>Brėžimas</u> (žr. 138 pav.).

1) Nubrėžiame atkarpą OM, jungiančią duotojo apskritimo centrą O su tašku M.

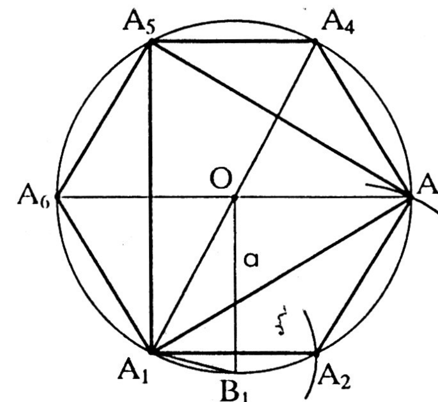
2) Randame atkarpos OM vidurį O_1 (žr. 1 uždavinį; spręsto uždavinio etapai nenurodomi, jo sprendimas laikomas vienu brėžimu).

3) Iš centro O_1 brėžiame $R=O_1O$ spindulio apskritimą. Pažymime šio apskritimo ir duotojo apskritimo susikirtimo taškus N_1 ir N_2.

4) Per taškus M ir N_1 bei M ir N_2 nubėžiame tieses MN_1 ir MN_2, kurios ir yra ieškomosios liestinės.

<u>8 uždavinys.</u> Tam tikrų taisyklingųjų daugiakampių brėžimas.

Taisyklingųjų daugiakampių brėžimo uždavinys dar vadinamas **apskritimo dalijimo į lygias dalis uždaviniu,** nes kiekvienas taisyklingasis n - kampis yra įbrėžtinis n - kampis. Aptarsime tam tikrų taisyklingųjų daugiakampių, kuriuos galima nubrėžti su skriestuvu ir liniuote, brėžimą.



139 pav.

- **<u>Taisyklingojo šešiakampio brėžimas.</u>**

Žinome, kad taisyklingojo šešiakampio kraštinė lygi apie jį apibrėžto apskritimo spinduliui. Nubrėžiame kokį nors apskritimą, kurio centras yra taškas O, o spindulys lygus R (139 pav.). Pasirenkame to apskritimo tašką A_1, kurį laikome taisyklingojo šešiakampio viršūne. Iš centro A_1 brėžiame spindulio R apskritimą. Pažymime pradinio apskritimo ir centro A_1 nubraižyto apskritimo susikirtimo tašką A_2. Taškas A_2 yra kita taisyklingojo šešiakampio viršūnė. Toliau iš centro A_2 brėžiame to paties spindulio R apskritimą ir pažymime pradinio ir nubraižyto apskritimo susikirtimo tašką A_3. Taškas A_3 yra trečioji taisyklingojo šešiakampio viršūnė. Analogiškai randame ir likusias tris šešiakampio viršūnes A_4, A_5 ir A_6. Viršūnes A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 sujungę tiesių atkarpomis, gauname ieškomąjį taisyklingąjį šešiakampį $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

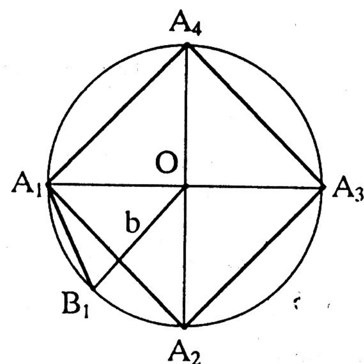
• **Lygiakraščio trikampio brėžimas.**

Jau aprašytuoju būdu (žr. skyrelį "Taisyklingojo šešiakampio brėžimas") randame šešis apskritimo taškus A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, kurie yra taisyklingojo šešiakampio viršūnės. Sujungę taškus A_1, A_3 ir A_5 tiesių atkarpomis (žr. 139 pav.), gauname lygiakraštį trikampį $A_1A_3A_5$.

• **Taisyklingojo dvylikakampio brėžimas.**

Iš apskritimo centro O per taisyklingojo šešiakampio (žr. skyrelį "Taisyklingojo šešiakampio brėžimas") kraštinės A_1A_2 vidurio tašką (žr. 1 uždavinio sprendimą) nubrėžiame spindulį a, kuris yra atkarpos A_1A_2 vidurio statmuo. Pažymėkime apskritimo ir atkarpos A_1A_2 vidurio statmens susikirtimo tašką B_1. Atkarpą A_1B_1 yra į apskritimą įbrėžto taisyklingojo dvylikakampio kraštinė.

• **Taisyklingojo keturkampio (kvadrato) brėžimas.**



140 pav.

140 paveiksle pavaizduotas taisyklingasis keturkampis (kvadratas). Jo viršūnės A_1, A_2, A_3 ir A_4 yra vienas kitam statmenų apskritimo skersmenų galai.

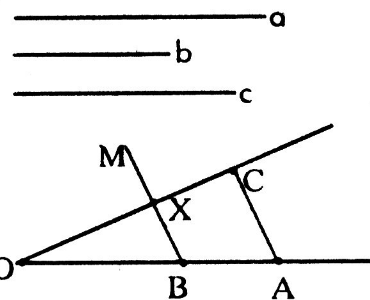
• **Taisyklingojo aštuoniakampio brėžimas.**

Nubrėžiame kvadratą (žr. 140 pav.). Surandame atkarpo A_1A_2 (kvadrato kraštinės) vidurio tašką. Per šį tašką ir apskritimo centrą nubrėžiame apskritimo spindulį b (atkarpos A_1A_2 vidurio statmenį). Apskritimo ir spindulio b susikirtimo taškas yra B_1. Atkarpa A_1B_1 yra taisyklingojo aštuoniakampio kraštinė.

9 uždavinys. Ketvirtos proporcingos atkarpos brėžimas.

Atkarpa, kurios ilgis x tenkina proporciją $a : b = c : x$, vadinama ketvirta proporcingąja atkarpa atkarpoms a, b ir c.

Sakykime, duotos atkarpos a, b ir c (žr. 141 pav.). Reikia nubrėžti ketvirtą proporcingąją atkarpa atkarpoms a, b ir c.



141 pav.

Brėžimas (žr. 141 pav.).

1) Brėžiame bet kokį neištiestinį kampą.

2) Vienoje to kampo kraštinėje nuo kampo viršūnės O atidedame atkarpas OA=a ir OB=b, o kitoje kraštinėje - OC=c.

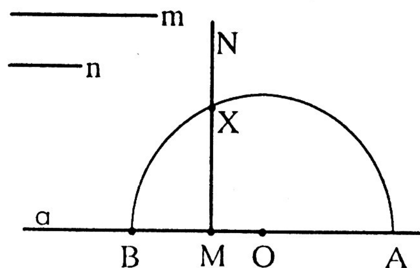
3) Nubrėžiame atkarpą AC.

4) Brėžiame tiesę MB, einančią per tašką B ir lygiagrečią tiesei AC. Nubrėžtos tiesės ir spindulio OC susikirtimo taškas yra X.

5) OX - ieškomoji atkarpa.

10 uždavinys. Atkarpų geometrinio vidurio brėžimas.

Reikia nubrėžti atkarpų m ir n (142 pav.) geometrinį vidurkį.



142 pav.

Brėžimas (žr. 142 pav.).

1) Brėžiame bet kokią tiesę a ir pažymime joje bet kurį tašką M.

2) Tiesėje a į skirtingas puses nuo M atidedame MA=m ir MB=n.

3) Randamas AB vidurio taškas O (žr. 1 uždavinį).

4) Iš centro O brėžiame spindulio AO apskritimą.

5) Brėžiame statmenį tiesei a, einantį per tašką M. 142 paveiksle minėtas statmuo yra tiesė MN.

6) Pažymime statmens MN ir apskritimo susikirtimo tašką X.

7) MX - ieškomoji atkarpa.

STEREOMETRIJA

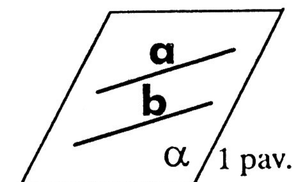
1. TIESĖS ERDVĖJE

- Dvi tiesės erdvėje gali būti:

1) **Lygiagrečios.**

Lygiagrečiomis tiesėmis erdvėje vadinamos dvi tiesės, kurios yra vienoje plokštumoje ir neturi bendrų taškų.

1 paveiksle pavaizduotos tiesės **a** ir **b** yra lygiagrečios : žymima **a** || **b**.



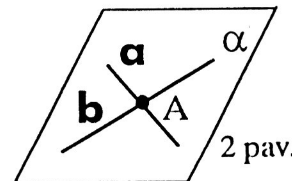
1 pav.

$a \in \alpha, b \in \alpha,$
$a \cap b = \varnothing.$

2) **Susikertančios.**

Susikertančiomis tiesėmis erdvėje vadinamos dvi tiesės, kurios yra vienoje plokštumoje ir turi vieną bendrą tašką.

2 paveiksle pavaizduotos dvi susikertančios tiesės **a** ir **b** (tiesės kertasi taške A).



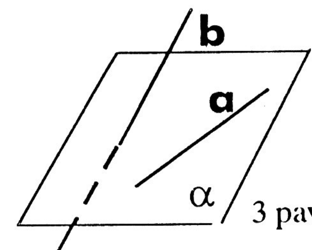
2 pav.

$a \in \alpha, b \in \alpha,$
$a \cap b = A.$

3) **Prasilenkiančios.**

Prasilenkiančiomis tiesėmis erdvėje vadinamos dvi tiesės, kurios nesusikerta ir nėra vienoje plokštumoje.

3 paveiksle pavaizduotos tiesės **a** ir **b** yra prasilenkiančios, nes jos yra skirtingose plokštumose.

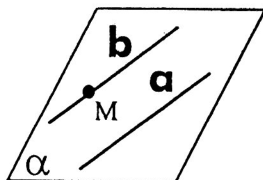


3 pav.

$a \in \alpha, b \notin \alpha,$
$a \cap b = \varnothing$

- **Lygiagrečių tiesių teorema**

Per kiekvieną erdvės tašką, nesantį tiesėje, eina tai tiesei lygiagreti tiesė, tačiau tik viena (teoremos iliustraciją žr. 4 pav.).



4 pav.

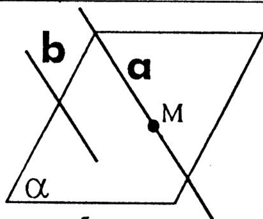
a - nagrinėjamoji tiesė;

M - toje tiesėje nesantis taškas;

b - vienintelė tiesė, einanti per tašką M ir lygiagreti tiesei **a** .

- **Plokštumos ir lygiagrečių tiesių kirtimosi teorema**

Jei viena iš dviejų lygiagrečių tiesių kerta plokštumą, tai ir kita tiesė kerta tą plokštumą (žr. 5 pav.).

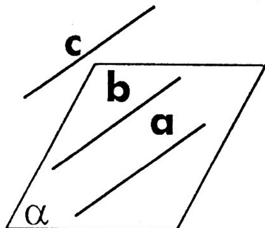


5 pav.

Jei **a** || **b** ir tiesė a kerta plokštumą α taške M, tai tiesė **b** irgi kerta plokštumą α, t.y. su ja turi tik vieną bendrą tašką.

- **Trijų tiesių lygiagretumo teorema.**

Jei dvi tiesės lygiagrečios trečiai tiesei, tai tai tos dvi tiesės lygiagrečios (žr. 6 pav.).

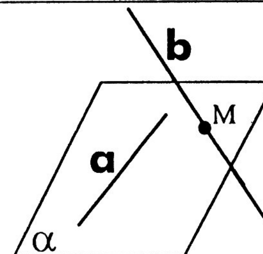


6 pav.

Jei **a** || **c** ir **b** || **c** , tai **a** || **b**.

- **Prasilenkiančiųjų tiesių požymis.**

Jei viena tiesė yra plokštumoje, o kita tiesė tą plokštumą kerta taške, nesančiame pirmoje tiesėje, tai tos tiesės yra prasilenkiančios (žr. 7 pav.).

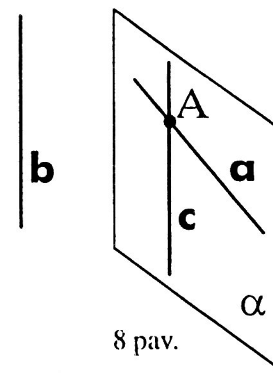


7 pav.

Jei tiesė **a** yra plokštumoje α , o tiesė **b** kerta tą plokštumą taške M , kuris nėra tiesėje **a** , tai **a** ir **b** - prasilenkiančios tiesės, kitaip sakant, jos nėra vienoje plokštumoje.

- **Prasilenkiančių tiesių teorema.**

Per kiekvieną iš dviejų prasilenkiančių tiesių eina kitai tiesei lygiagreti plokštuma, tačiau tik viena (žr. 8 pav.).

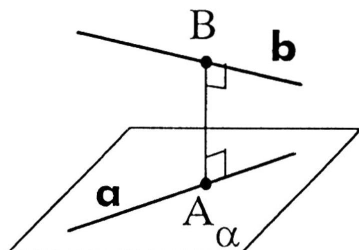


8 pav.

Jei **a** ir **b** yra dvi prasilenkiančios tiesės, tai per tiesę **a** eina vienintelė plokštuma α, lygiagreti tiesei **b**. Norėdami tuo įtikinti, per tiesės **a** tašką A išveskime tiesę **c**, lygiagrečią tiesei **b** (žr. 8 pav.). Plokštumą einančią per tieses **a** ir **c** pažymėkime raide α. Kadangi tiesės **a** ir **b** yra prasilenkiančios, tai tiesė **b** nėra plokštumoje α, be to, tiesė **b** lygiagreti tiesei **c**, esančiai toje plokštumoje. Tiesė **b** lygiagreti plokštumai α. Ši plokštuma yra vienintelė, nes kiekviena kita plokštuma, einanti per tiesę **a**, kerta tiesę **c**, vadinasi, kerta jai lygiagrečią tiesę **b**.

• Atstumas tarp dviejų prasilenkiančių tiesių.

Atstumu tarp prasilenkiančiųjų tiesių vadinamas jų bendrojo statmens ilgis, t.y. atkarpos, jungiančios artimiausius tiesių taškus, ilgis (žr. 9 pav.).



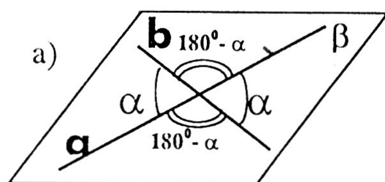
9 pav.

Tiesės **a** ir **b** yra prasilenkiančios. $AB \perp$ **a** , $AB \perp$ **b** , t.y. AB - bendrasis tiesių **a** ir **b** statmuo (atkarpa, jungianti artimiausius tiesių **a** ir **b** taškus A ir B).

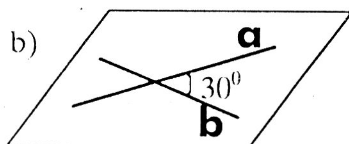
AB - **atstumas tarp prasilenkiančiųjų tiesių a ir b.**

• Kampas tarp susikertančiųjų tiesių.

Bet kurios dvi susikertančios tiesės yra vienoje plokštumoje ir sudaro keturis neištiestinius kampus. Jei α - tas kampas , kuris ne didesnis už kiekvieną iš kitų trijų kampų, tai jis vadinamas **kampu tarp susikertančiųjų tiesių** (žr. 10 pav.).

a) 

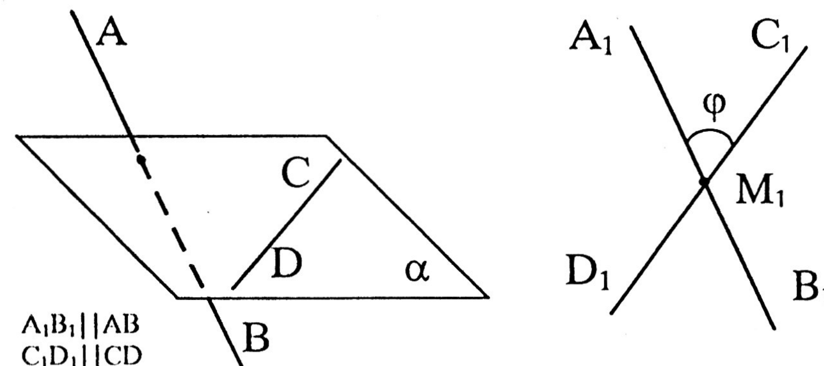
10 pav.

b) 

Jei **a** ir **b** yra dvi susikertančios tiesės, esančios plokštumoje β , tai kampas α yra laikomas kampu tarp susikertančiųjų tiesių **a** ir **b** (10 pav.a).Aišku, kad $0^0 < \alpha \le 90^0$.

10 paveiksle, b, nubraižytos dvi susikertančios tiesės **a** ir **b** ; kampas tarp šių tiesių lygus 30^0.

• Kampas tarp prasilenkiančiųjų tiesių



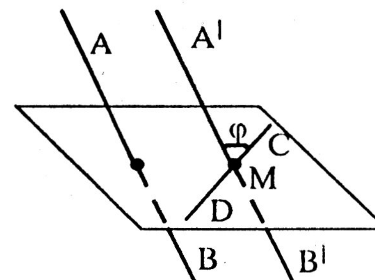
11 pav. a)

Sakykime, AB ir CD - dvi prasilenkiančios tiesės (11 pav. a). Pasirinkime bet kurį erdvės tašką M_1 ir per jį išveskime tieses A_1B_1 ir C_1D_1 , lygiagrečias tiesėms AB ir CD.

Kampu tarp prasilenkiančiųjų tiesių AB irCD vadinamas kampas tarp susikertančiųjų tiesių A_1B_1 ir C_1D_1 .

Jei kampas tarp tiesių A_1B_1 ir C_1D_1 lygus φ , tai kampas tarp prasilenkiančiųjų tiesių AB ir CD taip pat lygus φ (žr. 11 pav. a).

Kampas tarp prasilenkiančiųjų tiesių nepriklauso nuo taško M_1. Tašku M galime pasirinkti bet kurį vienos iš prasilenkiančiųjų tiesių tašką.



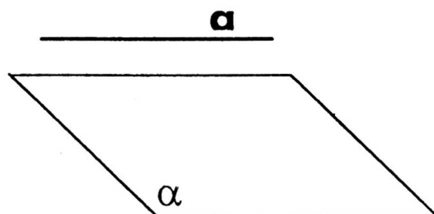
11 pav. b)

Pavyzdžiui, 11 pav. b), pažymėtas tiesės CD taškas M ir per jį išvesta tiesė A^IB^I lygiagreti tiesei AB. Kampas tarp prasilenkiančiųjų tiesių A^IB^I ir CD irgi lygus φ , t.y. lygus kampui tarp prasilenkiančiųjų tiesių AB ir CD.

2. TIESĖS IR PLOKŠTUMOS LYGIAGRETUMAS

Tiesė ir plokštuma, kurios neturi bendrų taškų, vadinamos **lygiagrečiomis**.

Jei tiesė **a** lygiagreti plokštumai α, tai rašome: **a** $||$ α

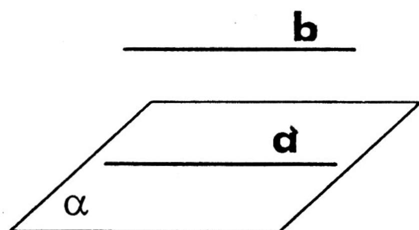


12 pav.

12 paveiksle pavaizduota tiesė a lygiagreti plokštumai α : a $||\alpha$

• Tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymis

Jei plokštumoje nesanti tiesė lygiagreti bet kuriai nors toje plokštumoje esančiai tiesei, tai ta tiesė lygiagreti plokštumai (žr. 13 pav.).



Tiesė **a** yra plokštumoje α (**a** $\in \alpha$). Jei **b** $||$ **a** , tai **b** $||$ α .

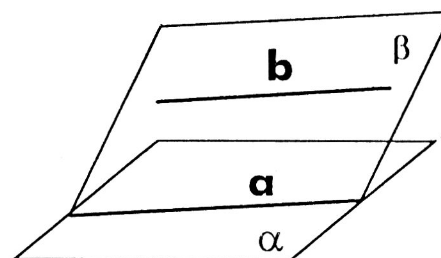
13 pav.

• Atstumas nuo tiesės iki jai lygiagrečios plokštumos

Atstumas nuo tiesės iki jai lygiagrečios plokštumos lygus atstumui nuo bet kurio tiesės taško iki duotosios plokštumos.

• Kelios tiesės ir plokštumos lygiagretumo teoremos, kuriomis dažnai remiamasi sprendžiant uždavinius.

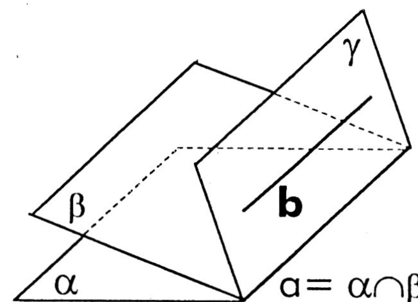
1.Teorema. Jei plokštuma eina per tiesę, lygiagrečią kitai plokštumai ir kerta tą plokštumą, tai plokštumų susikirtimo tiesė lygiagreti tai tiesei (žr. 14 pav.).



14 pav.

Plokštumoje β yra tiesė **b**. Jei **b**$||\alpha$ ir plokštuma β kerta plokštumą α , tai **b**$||$**a** ; čia **a** - plokštumų α ir β susikirtimo linija.

2.Teorema. Tiesė, lygiagreti kiekvienai iš dviejų susikertančių plokštumų, yra lygiagreti ir tų plokštumų susikirtimo tiesei (žr. 15 pav.).



15 pav.

Tiesė **b** yra plokštumoje γ . Jei **b**$||\alpha$ ir **b**$||\beta$, tai **b**$||$**a**; čia **a** - plokštumų α ir β susikirtimo tiesė.

3.Teorema. Jei viena iš dviejų lygiagrečių tiesių lygiagreti plokštumai, tai kita tiesė arba lygiagreti tai plokštumai, arba yra toje plokštumoje.

3.TIESĖS IR PLOKŠTUMOS STATMENUMAS.

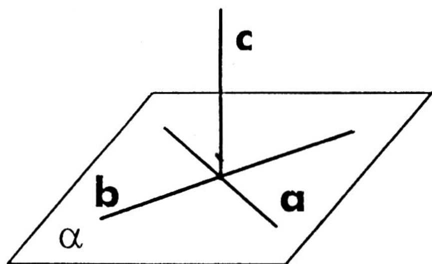
Tiesė, kuri statmena kiekvienai tiesei, esančiai plokštumoje, vadinama tai **plokštumai statmena tiese.**

Tiesės **a** ir plokštumos α statmenumas žymimas šitaip : **a** ⊥ α .

Jei tiesė **a** yra statmena plokštumai α , tai ji kerta tą plokštumą.

- **Tiesės ir plokštumos statmenumo požymis.**

Jei tiesė statmena dviem susikertančioms tiesėms, esančioms plokštumoje, tai ji statmena tai plokštumai (žr. 16 pav.).

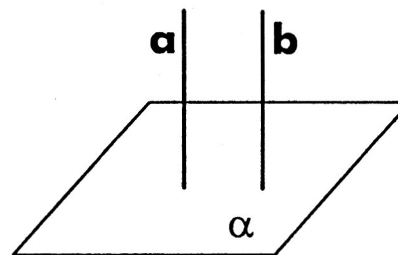


16 pav.

Jei **c** ⊥**a** ir **c** ⊥**b** , tai **c** ⊥ α .

- **Teoremos, atskleidžiančios tiesių ir plokštumos lygiagretumo ir statmenumo ryšį.**

Teorema. Jei viena iš dviejų lygiagrečių tiesių yra statmena plokštumai, tai ir kita tiesė statmena tai plokštumai (žr. 17 pav.).



17 pav.

Jei **a**||**b** ir **a**⊥α , tai ir **b**⊥α .

Atvirkštinė teorema.

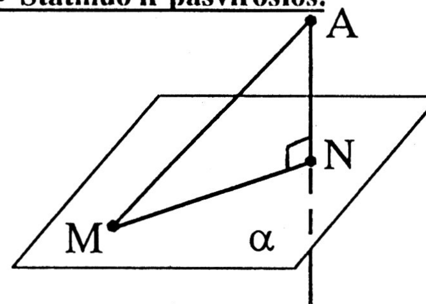
Jei dvi tiesės statmenos plokštumai, tai jos lygiagrečios . (žr. 17 pav.).

Jei **a** ⊥α ir **b** ⊥α , tai **a**||**b** (žr. 17 pav.).

- **Tiesės, statmenos plokštumai, teorema.**

Per kiekvieną erdvės tašką eina turimai plokštumai statmena tiesė, tačiau tik viena.

- **Statmuo ir pasvirosios.**



18 pav.

Taškas A nėra plokštumoje α . Per tašką A išveskime tiesę, statmeną plokštumai α . Tos tiesės ir plokštumos α susikirtimo tašką pažymėkime raide N (žr. 18 pav.). Plokštumoje α pažymėkime kurį nors tašką M , nesutampantį su tašku N. Išveskime atkarpą AM.

Tada : atkarpa AN - **statmuo, nuleistas iš taško A į plokštumą** α ; taškas N - **statmens AN pagrindas** ; atkarpa AM - **pasviroji, išvesta iš taško A į**

plokštumą α ; taškas M - **pasvirosios AM pagrindas** ; atkarpa MN - **pasvirosios AM projekcija plokštumoje** α .

Statmuo, nuleistas iš taško į plokštumą, mažesnis už kiekvieną pasvirąją, išvestą iš to taško į tą pačią plokštumą.

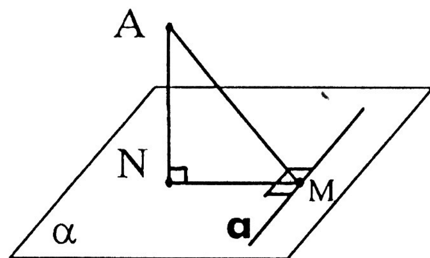
AN < AM (žr. 18 pav.).

• **Atstumas nuo taško iki plokštumos.**

Statmens AN, nuleisto iš taško A į plokštumą α, ilgis vadinamas **atstumu nuo taško A iki plokštumos** α(žr. 18 pav.).

• **Trijų statmenų teorema.**

Tiesė, išvesta plokštumoje per pasvirosios pagrindą ir statmena jos projekcijai toje plokštumoje, yra statmena ir pasvirajai (žr. 19 pav.).



19 pav.

Jei AN-statmuo plokštumai α , AM - pasviroji, o **a** - tiesė , išvesta plokštumoje α per tašką M ir statmena pasvirosios projekcijai MN , tai **a** ⊥ AM.

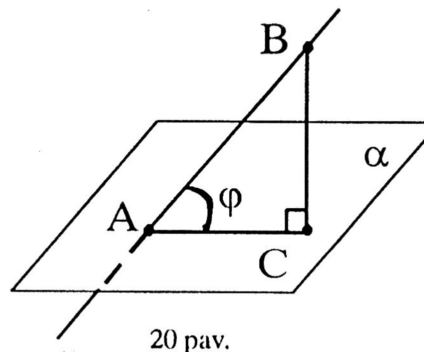
Teisinga ir atvirkštinė teorema :

Tiesė, išvesta plokštumoje per pasvirosios pagrindą ir statmena pasvirajai, yra statmena ir jos projekcijai (žr. 19 pav.).

Jei **a** ⊥ AM , tai **a** ⊥ MN (žr. 19 pav.).

4.KAMPAS TARP TIESĖS IR PLOKŠTUMOS.

Kampu tarp tiesės ir plokštumos , kertančios tą tiesę ir jai nestatmenos, vadinamas kampas tarp tiesės ir jos projekcijos plokštumoje (žr. 20 pav.).



20 pav.

Jei AC - tiesės AB projekcija plokštumoje α , tai φ - kampas tarp tiesės AB = **a** ir plokštumos α .

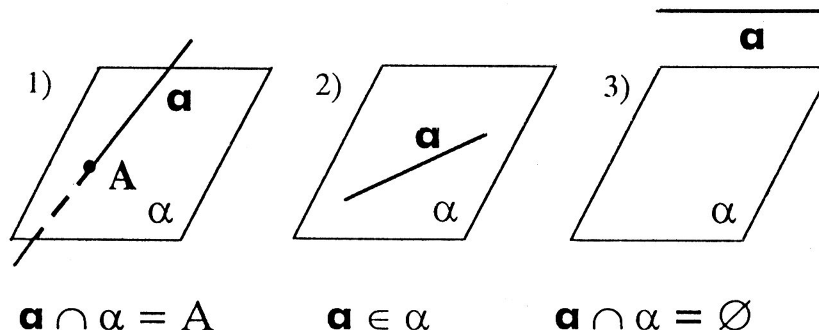
5. TIESĖS IR PLOKŠTUMOS PADĖTIS ERDVĖJE.

Skiriamos trys tiesės ir plokštumos padėtys erdvėje:

1) Tiesė ir plokštuma turi vieną bendrą tašką A (**tiesė ir plokštuma susikerta**).

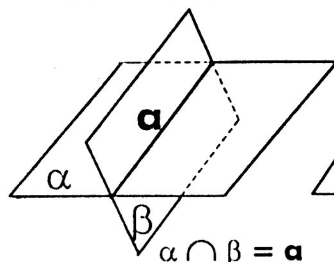
2) Tiesė priklauso plokštumai (yra plokštumoje).

3) Tiesė ir plokštuma neturi bendrų taškų (tiesė **lygiagreti plokštumai**).

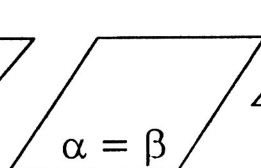


6. PLOKŠTUMŲ PADĖTIS ERDVĖJE

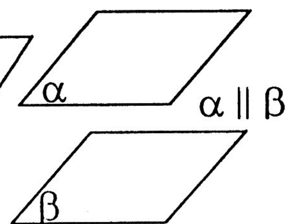
Dvi plokštumos erdvėje arba **kertasi** (jų susikirtimo linija yra tiesė) (žr. 21 pav.) arba **sutampa** (žr. 22 pav.), arba yra **lygiagrečios** (neturi bendrų taškų) (žr. 23 pav.).



21 pav.



22 pav.



23 pav.

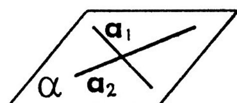
7. PLOKŠTUMŲ LYGIAGRETUMAS

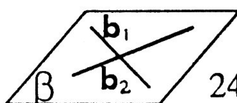
Dvi plokštumos, kurios nesusikerta, vadinamos **lygiagrečiomis plokštumomis**.

Plokštumų α ir β lygiagretumas žymimas $\alpha \parallel \beta$.

• **Dviejų plokštumų lygiagretumo požymis.**

Jei vienos plokštumos dvi susikertančios tiesės lygiagrečios kitos plokštumos dviem susikertančioms tiesėms, tai tos plokštumos lygiagrečios (žr. 24 pav.).



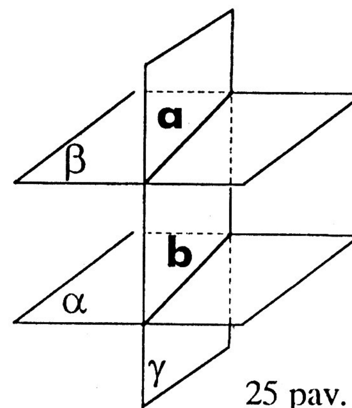


24 pav.

Susikertančios tiesės $\mathbf{a}_1$ ir $\mathbf{a}_2$ yra plokštumoje α, o susikertančios tiesės $\mathbf{b}_1$ ir $\mathbf{b}_2$ yra plokštumoje β. Jei $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{b}_1$ ir $\mathbf{a}_2 \parallel \mathbf{b}_2$, tai $\alpha \parallel \beta$.

• **Lygiagrečių plokštumų savybės.**

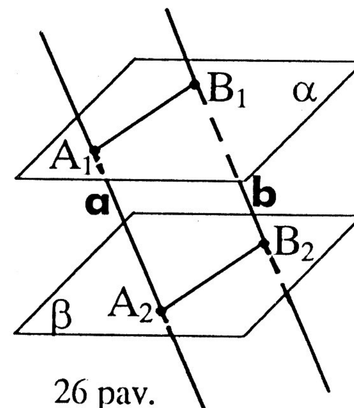
1.teorema. Jei dvi lygiagrečias plokštumas kerta trečia plokštuma, tai jų susikirtimo tiesės lygiagrečios (žr. 25 pav.).



25 pav.

Jei $\alpha \parallel \beta$, o plokštuma γ kerta plokštumas α ir β tiesėmis $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ atitinkamai, tai tada $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

2 teorema. Lygiagrečių tiesių atkarpos, esančios tarp lygiagrečių plokštumų, lygios (žr. 26 pav.).



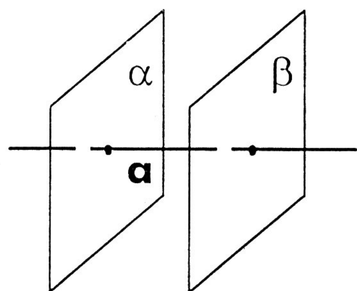
26 pav.

Jei $\alpha \parallel \beta$, o a ir b - plokštumas α ir β kertančios lygiagrečios tiesės, tai

$$A_1A_2 = B_1B_2$$

čia A_1 , A_2 ir B_1 , B_2 - tiesių ir plokštumų susikirtimo taškai.

3 teorema. Jei dvi lygiagrečias plokštumas kerta tiesė, statmena vienai iš plokštumų, tai ta tiesė statmena ir kitai plokštumai (žr. 27 pav.).



27 pav.

Jei α || β ir **a** ⊥ α , tai ir **a** ⊥ β .

Jei α ⊥**a** ir β ⊥**a**, tai α || β .

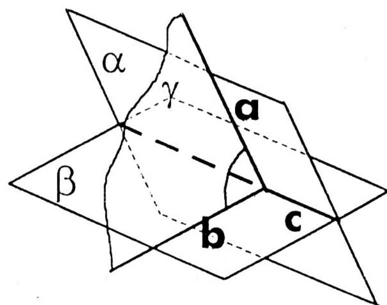
Teisinga ir atvirkštinė teorema:

Jei dvi plokštumos statmenos tiesei, kertančią ją, tai tos plokštumos lygiagrečios (žr. 27 pav.).

- **Atstumas tarp dviejų lygiagrečių plokštumų.**

Atstumas tarp dviejų lygiagrečių plokštumų lygus atstumui nuo bet kurio vienos plokštumos taško iki kitos plokštumos.

8. KAMPAS TARP PLOKŠTUMŲ.

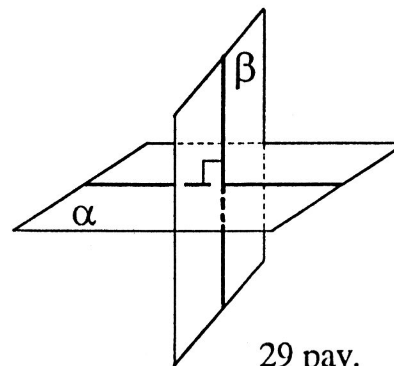


28 pav.

Tegu α ir β - dvi susikertančios plokštumos, o **c** - jų susikirtimo tiesė. Išvedame plokštumą γ , statmeną tiesei **c**. **a** - plokštumos α susikirtimo su plokštuma γ tiesė, o **b** - plokštumos β susikirtimo su γ tiesė. Kampas tarp plokštumų α ir β lygus kampui tarp susikertančiųjų tiesių **a** ir **b** (žr. 28 pav.).

9. PLOKŠTUMŲ STATMENUMAS.

Statmenomis (viena kitai statmenomis) plokštumomis vadinamos **dvi** susikertančios plokštumos, kampas tarp kurių lygus 90^0 (žr. 29 pav.).



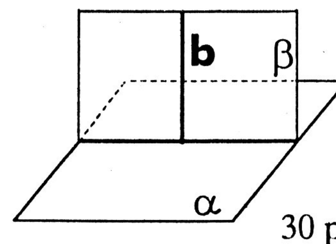
29 pav.

Plokštumų α ir β statmenumas žymimas taip: α ⊥β.

Visi keturi dvisieniai kampai, **kuriuos** sudaro vienai kitai statmenos plokštumos, yra statūs.

- **Dviejų plokštumų statmenumo požymis.**

Jei viena iš dviejų plokštumų eina per tiesę statmeną kitai plokštumai, **tai** tos plokštumos viena kitai statmenos (žr. 30 pav.)

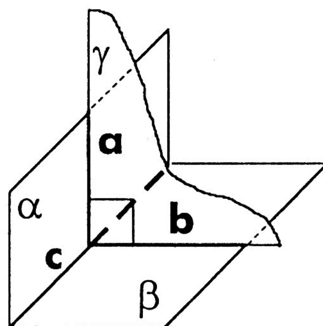


30 pav.

Jei **b** ⊥ α ir plokštuma β eina per tiesę **b**, tai β ⊥ α .

Išvada iš dviejų plokštumų statmenumo požymio:

Plokštuma, statmena dviejų plokštumų susikirtimo tiesei, yra statmena kiekvienai tų plokštumų (žr. 31 pav.).



Jei $\gamma \perp c$, tai $\gamma \perp \alpha$ ir $\gamma \perp \beta$;

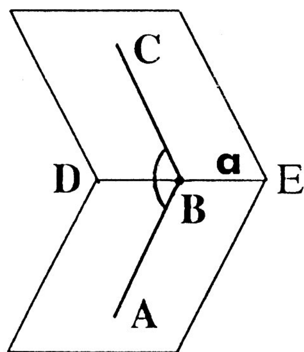
čia **c** - plokštumų α ir β susikirtimo tiesė.

31 pav.

10. DVISIENIS KAMPAS

Dvisieniu kampu vadiname figūrą, kurią sudaro tiesė **a** bei dvi pusplokštumės, turinčios bendrą kraštą **a**, bet nesančios vienoje plokštumoje (žr. 32 pav.).

Dvisienį kampą sudarančios pusplokštumės vadinamos **dvisienio kampo sienomis**, o pusplokštumių bendras kraštas - tiesė **a** - vadinamas **dvisienio kampo briauna.**

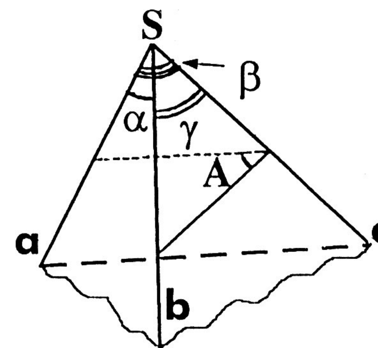


32 pav.

Dvisienio kampo tiesiniu kampu vadinamas kampas tarp statmenų briaunai DE spindulių BC ir BA, išvestų iš bet kurio briaunos taško B.

Dvisienio kampo laipsniu matu vadinamas jo tiesinio kampo laipsninis matas. 32 pav. pavaizduoto dvisienio kampo laipsninis matas lygus tiesinio kampo CBA laipsniniam matui.

11. TRISIENIS KAMPAS



33 pav.

Trisienis kampas (abc) yra erdvinė figūra, kurią sudaro trys plokštieji kampai (**ab**), (**bc**) ir (**ac**) (žr. 33 pav.).

Trisienio kampo kampų savybės:

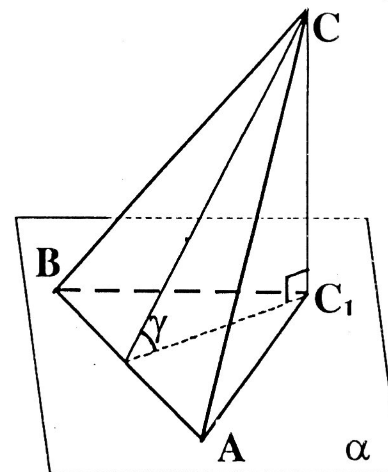
$\alpha<\beta+\gamma$; $\beta<\gamma+\alpha$; $\gamma<\alpha+\beta$;

$\alpha+\beta+\gamma<360^0$.

Trisienio kampo kosinusų teorema:

$\cos\alpha=\cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos A$.

12. DAUGIAKAMPIO STATMENOSIOS PROJEKCIJOS PLOTAS.



34 pav.

Daugiakampio statmenosios projekcijos plokštumoje plotas lygus jo ploto ir kampo tarp daugiakampio plokštumos ir projekcijos plokštumos kosinuso sandaugai.

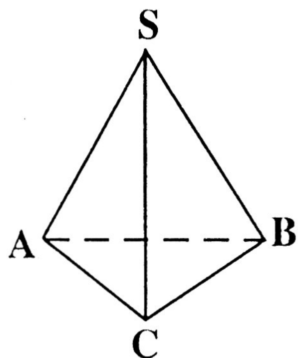
Trikampio atveju (žr. 34 pav.):

$$S_{\Delta ABC_1}=S_{\Delta ABC} \cdot \cos\gamma$$

čia trikampis ABC_1 yra trikampio ABC statmenoji projekcija plokštumoje α .

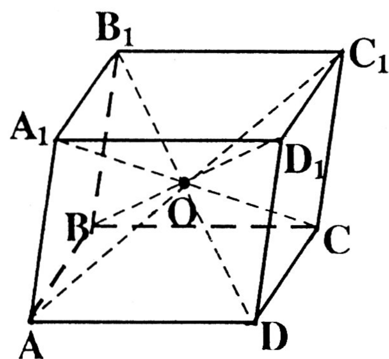
13. BRIAUNAINIAI (Bendros sąvokos)

Paviršių sudarytų iš daugiakampių ir ribojantį tam tikrą geometrinį kūną, vadiname **daugiasieniu paviršiumi**, arba **briaunainiu**.



35 pav.

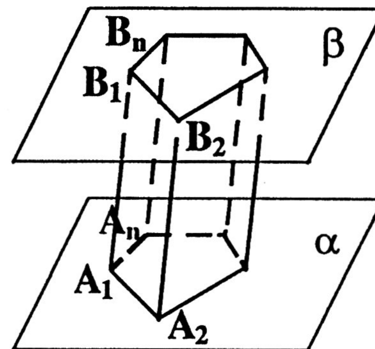
Daugiakampiai, iš kurių sudarytas briaunainis, vadinami **briaunainio sienomis**. Briaunainio sienų kraštinės vadinamos **briaunainio briaunomis**, o briaunų galai - **briaunainio viršūnėmis**. Atkarpa, jungianti dvi ne vienoje sienoje esančias viršūnes, vadinama **briaunainio įstrižaine**. 35 paveiksle pavaizduotas briaunainis vadinamas **tetraedru**. Jo visos trys sienos SAC, SCB ir SAB - lygiakraščiai trikampiai. Tetraedro briaunos yra SA, SC ir SB, o viršūnės S, A, C ir B. 36 paveiksle pavaizduotas briaunainis vadinamas **gretasieniu**. Jo visos šešios sienos ABCD, AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D, AA_1D_1D ir $A_1B_1C_1D_1$ lygiagretainiai. Gretasienio briaunos yra AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, AB, BC, CD, AD, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1, o viršūnės A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1. Gretasienis turi keturias įstrižaines AC_1, BD_1, CA_1, DB_1, kurios **susikerta viename taške** O.



36 pav.

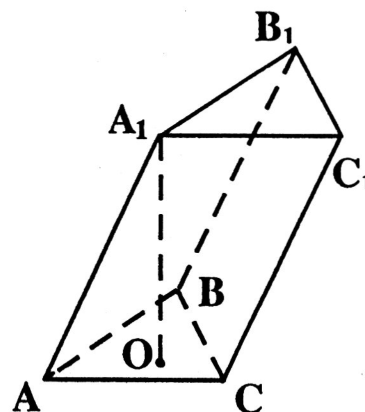
14. PRIZMĖ

n - kampe prizme vadinamas briaunainis, kurį sudaro du lygūs n - kampiai, esantys lygiagrečiose plokštumose, bei n lygiagretainių (žr. 37 pav.).



37 pav.

Daugiakampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ vadinami **prizmės pagrindais**, o lygiagretainiai $A_1A_2B_2B_1$,..., $A_nA_1B_1B_n$ - **prizmės šoninėmis sienomis**. Atkarpos A_1B_1 , A_2B_2 ,..., A_nB_n vadinamos **prizmės šoninėmis briaunomis**, - jos yra lygios ir lygiagrečios. Prizmė, kurios pagrindai: $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ žymima $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$.



38 pav.

38 paveiksle pavaizduota trikampė prizmė $ABCA_1B_1C_1$.

Statmuo, nuleistas iš vieno prizmės pagrindo kurio nors taško į kitą pagrindo plokštumą, vadinamas **prizmes aukštine**. 38 paveiksle atkarpa A_1O yra trikampės prizmės aukštinė.

Prizmės paviršiaus plotu vadinama visų jos sienų plotų suma, o **prizmės šoninio paviršiaus plotu** - jos šoninių sienų plotų suma.

Prizmės pagrindo perimetru vadiname prizmės pagrindo kraštinių sumą.

Toliau žymėsime:

$S_{pagr.}$ - prizmės pagrindo plotas;

S_{pr} - prizmės paviršiaus plotas;

$S_{šon}$ - prizmės šoninio paviršiaus plotas;

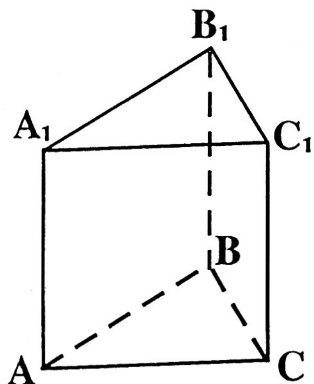
P - prizmės pagrindo perimetras;

H - prizmės aukštinė;

V - prizmės tūris.

PRIZMIŲ RŪŠYS:

- **Stačioji prizmė.**



39 pav.

Prizmė, kurios šoninės briaunos statmenos pagrindams, vadinama **stačiąja.**

39 paveiksle pavaizduota stačioji trikampė prizmė.

Stačiosios prizmės aukštinė lygi jos šoninei briaunai.

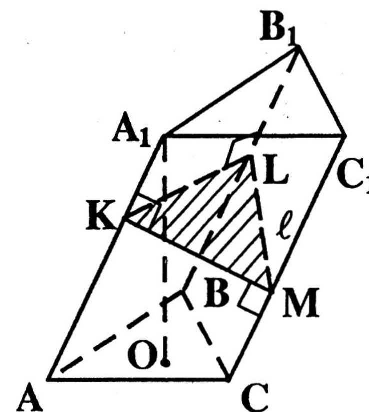
$AA_1=BB_1=CC_1=H$

$S_{šon.} = PH$

$S_{pr.} = S_{šon.} + 2S_{pagr.}$

$V = S_{pagr.} \cdot H$

- **Pasviroji prizmė**



40 pav.

Prizmė, kurios šoninės briaunos nėra statmenos pagrindams, vadinama **pasvirąja.**

Pasvirosios prizmės šonines sienas perkirtę šoninėms briaunoms statmena plokštuma, gauname prizmės **statmenąjį pjūvį**. Prizmės statmenojo pjūvio perimetrą žymėsime raide $\mathbf{p}_\perp$, o statmenojo pjūvio plotą $S_\perp$.

40 paveiksle pavaizduota pasviroji trikampė prizmė $ABCA_1B_1C_1$: $A_1O = H$ - pasvirosios prizmės aukštinė (ji, skirtingai negu statčiosios trikamoės prizmės atveju, nelygi šoninei briaunai); trikampis KLM - prizmės statmenasis pjūvis (trikampio kraštinės statmenos prizmės briaunoms), o

$\mathbf{p}_\perp = KL + LM + KM$ - statmenojo pjūvio perimetras;

$S_{\Delta KLM} = S_\perp$ - statmenojo pjūvio plotas; $\ell = AA_1=BB_1=CC_1$ - pasvirosios trikampės prizmės šoninės briaunos ilgis. Teisingos formulės:

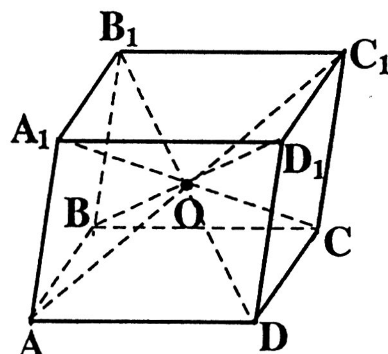
$S_{šon} = \mathbf{p}_\perp \cdot \ell$; $S_{pr.} = S_{šon} + 2S_{pagr.}$; $V = S_\perp \cdot H$

- **Taisyklingoji prizmė**

Stačioji prizmė, kurios pagrindai yra taisyklingieji daugiakampiai, vadinama **taisyklingąja prizme.**

Taisyklingosios prizmės visos šoninės sienos yra lygūs stačiakampiai.

15. GRETASIENIS



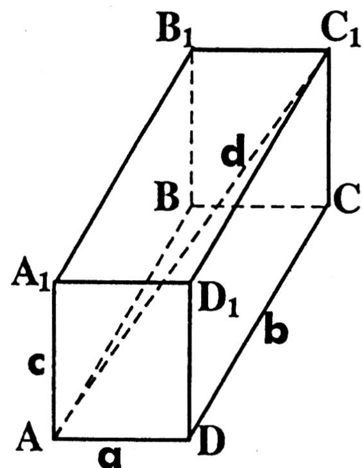
41 pav.

Prizmė, kurios pagrindas yra lygiagretainis, vadinama **gretasieniu.**

41 paveiksle pavaizduotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$; AC_1, DB_1, BD_1, CA_1 - keturios gretasienio įstrižainės; O - įstrižainių susikirtimo taškas.

Gretasienio priešingos sienos lygiagrečios ir lygios. Gretasienio įstrižainės susikerta viename taške, kuris kiekvieną jų dalija pusiau. Gretasienio įstrižainių susikirtimo taškas yra jo simetrijos centras.

• STAČIAKAMPIS GRETASIENIS



42 pav.

Statusis gretasienis, kurio pagrindas yra stačiakampis, vadinamas **stačiakampiu gretasieniu.**

42 paveiksle pavaizduotas stačiakampis gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

$AA_1=BB_1=CC_1=DD_1=H$ - stačiakampio gretasienio aukštinė; $AC_1=\mathbf{d}$ - stačiakampio gretasienio įstrižainė;

$AD=\mathbf{a}$, $CD=\mathbf{b}$, $AA_1=\mathbf{c}$ - stačiakampio gretasienio matmenys (plotis, ilgis, aukštis).

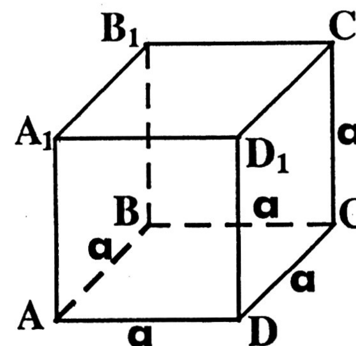
Visos stačiakampio gretasienio įstrižainės yra lygios.

Stačiakampio gretasienio įstrižainės kvadratas lygus trijų jo matmenų kvadratų sumai:

$$\mathbf{d}^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2$$

$S_{pagr.} = \mathbf{ab}$; $S_{šon.} = 2(\mathbf{ac}+\mathbf{bc})$; $V= \mathbf{abc}$

• KUBAS



43 pav.

Stačiakampis gretasienis, kurio visos briaunos lygios, vadinamas **kubu**.

43 paveiksle pavaizduotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

$AB=BC=CD=AD=A_1B_1=B_1C_1=$ $=C_1D_1=A_1D_1=AA_1=DD_1=CC_1=$ $=BB_1=\mathbf{a}$.

Kubo visos sienos yra kvadratai.

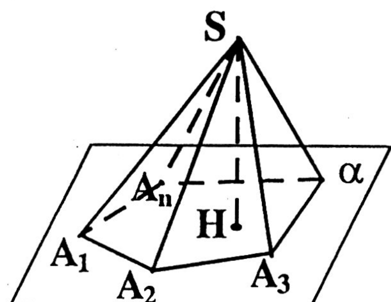
$S_{pagr.} = \mathbf{a}^2$; $S_{šon.}= 4\mathbf{a}^2$; $S_{kubo}=6\mathbf{a}^2$;

$\mathbf{d}^2=3\mathbf{a}^2$; $V=\mathbf{a}^3$;

formulėse S_{kubo} - kubo paviršiaus plotas; **d** - kubo įstrižainė.

16. PIRAMIDĖ

Piramide vadinamas briaunainis, sudarytas iš n - kampio $A_1A_2...A_n$ ir trikampių SA_1A_2, SA_2A_3,..., SA_nA_1 (žr. 44 pav.).

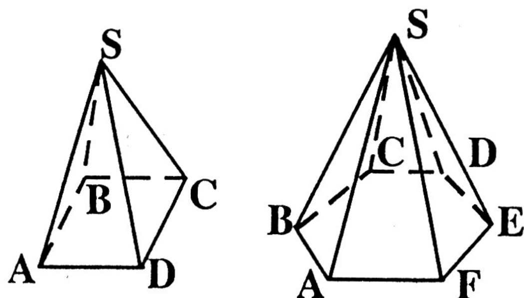


44 pav.

Daugiakampis $A_1A_2...A_n$ vadinamas **piramidės pagrindu,** o trikampiai SA_1A_2, SA_2A_3,...,SA_nA_1 - **piramidės šoninėmis sienomis.**

Taškas S vadinamas **piramidės viršūne**, o atkarpos SA_1, SA_2,...,SA_n - **piramidės šoninėmis briaunomis.** Piramidė, kurios pagrindas $A_1A_2...A_n$ ir viršūnė S, žymima $SA_1A_2...A_n$ ir vadinama **n - kampe piramide.**

45 paveiksle pavaizduotos keturkampė SABCD ir šešiakampė SABCDEF piramidės.



45 pav.

Statmuo, nuleistas iš piramidės viršūnės į pagrindo plokštumą, vadinamas piramidės **aukštine.**

44 paveiksle atkarpa SH - piramidės aukštinė.

Piramidės paviršiaus plotu vadinama visų jos sienų (t.y. pagrindo ir šoninių sienų) plotų suma, o **piramidės šoninio paviršiaus plotu** - jos šoninių sienų plotų suma.

Toliau žymėsime:

$S_{pagr.}$ - piramidės pagrindo plotas;

$S_{šon.}$ - piramidės šoninio paviršiaus plotas;

$S_{pir.}$ - piramidės paviršiaus plotas;

H - piramidės aukštinė;

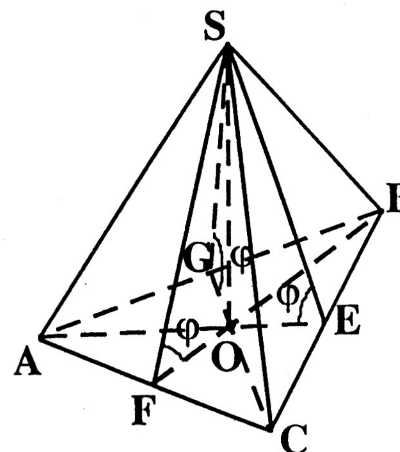
P - piramidės pagrindo perimetras;

V - piramidės tūris.

PIRAMIDŽIŲ RŪŠYS.

• TAISYKLINGOJI PIRAMIDĖ.

Piramidė - kurios pagrindas taisyklingasis daugiakampis, o atkarpa, jungianti piramidės viršūnę su pagrindo centru, yra piramidės aukštinė, vadinama **taisyklingąja piramide.**



46 pav.

46 paveiksle pavaizduota taisyklingoji trikampė piramidė.

Taisykligosios piramidės visos šoninės briaunos lygios, o šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai.

Piramidės šoninės sienos aukštinė vadinama piramidės **apotema.**

Piramidės apotema žymima raide **d** .

46 pav. pavaizduotoje piramidėje

SE=SF=SG=**d** - piramidės apotemos;

SO=H - piramidės aukštinė;

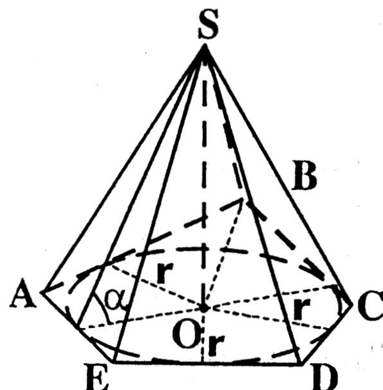
Δ SEO = Δ SFO =Δ SGO =φ - kampas kurį, sudaro šoninė siena su pagrindo plokštuma (dvisienis kampas prie pagrindo).

Teisingos formulės:

$$S_{šon.} = \frac{1}{2} Pd \quad ; \quad S_{šon.} = \frac{S_{pagr.}}{\cos\gamma} \quad ;$$

$$S_{pir.} = S_{šon.} + S_{pagr.} \quad ; \quad V = \frac{1}{3} S_{pagr.} \cdot H \quad .$$

• PIRAMIDĖ, KURIOS VISOS ŠONINĖS SIENOS SU PAGRINDO PLOKŠTUMA SUDARO VIENĄ IR TĄ PATĮ KAMPĄ α



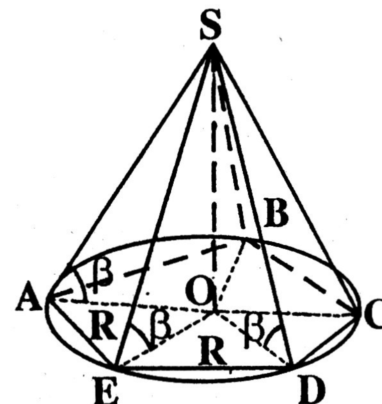
47 pav.

Tokiai piramidei tinka visos taisyklingajai piramidei užrašytos formulės. 47 pav. pavaizduota penkiakampė piramidė, kurios visos šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro vieną ir tą patį kampą α. Tokios piramidės viršūnės S statmenoji projekcija į pagrindą yra taškas O, kuris yra **į pagrindą įbrėžto apskritimo centras** (žr. 47 pav.). 47

pav. **r - į pagrindą įbrėžto apskritimo spindulys.**

Pastaba. Jei piramidės visų šoninių briaunų apotemų ilgiai lygūs, tai jos viršūnės statmenoji projekcija į pagrindą taip pat yra į pagrindą įbrėžto apskritimo centras.

• **Piramidė, kurios visos šoninės briaunos su pagrindo plokštuma sudaro vieną ir tą patį kampą β.**



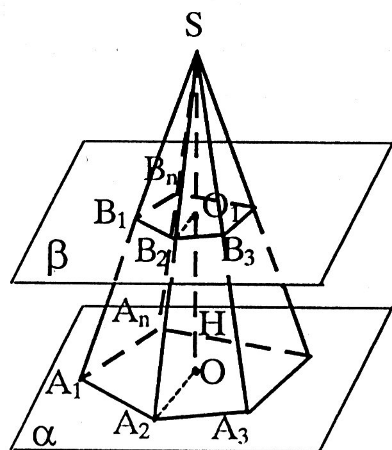
48 pav.

48 paveiksle pavaizduota penkiakampė piramidė, kurios visos šoninės briaunos su pagrindo plokštuma sudaro vieną ir tą patį kampą β .Tokios piramidės viršūnės S statmenoji projekcija į pagrindą yra taškas O, kuris yra **apie pagrindą apibrėžto apskritimo centras** (žr. 48 pav.).48 paveiksle R - **apie pagrindą apibrėžto apskritimo spindulys.**

Pastaba. Jei piramidės visos šoninės briaunos vienodo ilgio, tai jos viršūnės statmenoji projekcija į pagrindą taip pat yra apie pagrindą apibrėžto apskritimo centras.

17. NUPJAUTINĖ PIRAMIDĖ

Briaunainis, kurio sienos yra n kampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ (**apatinis ir viršutinis pagrindai**), esantys lygiagrečiose plokštumose, ir n keturkampių $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$,..., $A_nA_1B_1B_n$ (**šoninės sienos**), vadinamas **nupjautine piramide** (žr. 49 pav.) .



49 pav.

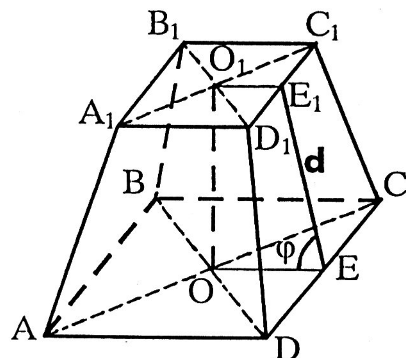
Nupjautinė piramidė $A_1A_2A_3...A_nB_1B_2...B_n$ yra gauta iš piramidės $SA_1A_2...A_n$ pastarąją perkirtus plokštuma β , lygiagrečia piramidės pagrindo $A_1A_2...A_n$ plokštumai α (žr. 49 pav.).

> Statmuo, nuleistas iš vieno pagrindo kurio nors taško į kito pagrindo plokštumą, vadinamas nupjautinės piramidės **aukštine**.

49 paveiksle pavaizduotos nupjautinės piramidės aukštinė yra $OO_1= H$.

> Nupjautinės piramidės visos šoninės sienos yra trapecijos.

• TAISYKLINGOJI NUPJAUTINĖ PIRAMIDĖ.



50 pav.

> Nupjautinė piramidė, kuri gaunama taisyklingąją piramidę perkirtus pagrindui lygiagrečia plokštuma, vadinama **taisyklingąja nupjautine piramide.**

50 paveiksle pavaizduota taisyklingoji nupjautinė keturkampė piramidė.

> Taisyklingosios nupjautinės piramidės pagrindai yra taisyklingieji daugiakampiai, o visos šoninės sienos - **lygiašonės trapecijos**. Tų trapecijų aukštinės vadinamos **apotemomis**.

> Nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus plotas yra jos šoninių sienų plotų suma.

> Nupjautinės piramidės pagrindai yra panašieji daugiakampiai.

Pažymėkime:

P_1 - taisyklingosios nupjautinės piramidės apatinio pagrindo perimetras;
P_2 - taisyklingosios nupjautinės piramidės viršutinio pagrindo perimetras;
S_1 - taisyklingosios nupjautinės piramidės apatinio pagrindo plotas;
S_2 - taisyklingosios nupjautinės piramidės viršutinio pagrindo plotas;
d - taisyklingosios nupjautinės piramidės apotema (50 pav. atkarpa $E_1E=$**d**);
$S_{N.pir.}$ - taisyklingosios nupjautinės piramidės paviršiaus plotas;
$S_{N.šon.}$ - taisyklingosios nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus plotas.

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{AD}{A_1D_1}$$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}=\frac{CD^2}{C_1D_1^2}=\frac{AD^2}{A_1D_1^2}$$

$$S_{N.šon}=\frac{P_1+P_2}{2}\cdot d \quad ; \qquad S_{N.šon.}=\frac{S_1-S_2}{\cos\varphi} \quad ;$$

čia φ - kampas tarp taisyklingosios nupjautinės piramidės šoninės sienos ir apatinio pagrindo plokštumos (50 pav. $\Delta E_1EO=\varphi$).

$$S_{N.pir.}=S_{N.šon}+S_1+S_2 \quad ; \qquad V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}) \quad .$$

18. TAISYKLINGIEJI BRIAUNAINIAI

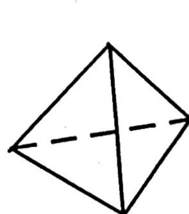
Taisyklinguoju briaunainiu vadinamas iškilasis briaunainis, kurio visos sienos yra lygūs taisyklingieji daugiakampiai ir į kiekvieną jo viršūnę sueina tiek pat briaunų.

Nėra taisyklingojo briaunainio, kurio sienos yra taisyklingieji šešiakampiai, septyniakampiai, apskritai n - kampiai, kai $n \geq 6$.

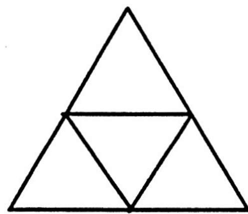
Yra šie taisyklingieji briaunainiai :

• **TAISYKLINGASIS TETRAEDRAS (51 pav.).**

Jis sudarytas iš keturių lygiakraščių trikampių. Kiekviena jo viršūnė yra trijų trikampių viršunė, o prie kiekvienos viršūnės esančių plokščiųjų kampų suma lygi 180^0. Taisyklingojo tetraedro išklotinė pavaizduota 52 paveiksle.



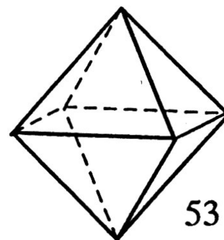
51 pav.



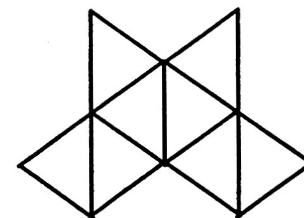
52 pav.

• **TAISYKLINGASIS OKTAEDRAS (53 pav.)**

Jis sudarytas iš aštuonių lygiakraščių trikampių. Kiekviena oktaedro viršūnė yra keturių trikampių viršūnė, o prie kiekvienos viršūnės esančių plokščiųjų kampų suma lygi 240^0. Taisyklingojo oktaedro išklotinė pavaizduota 54 paveiksle.



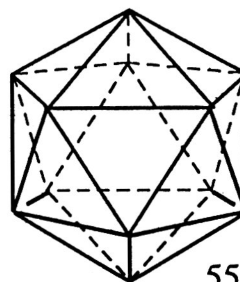
53 pav.



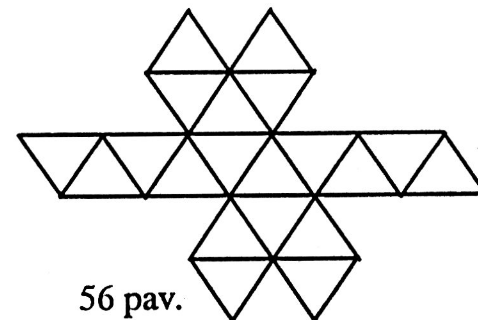
54 pav.

• **TAISYKLINGASIS IKOSAEDRAS (55 pav.)**

Jis sudarytas iš dvidešimt lygiakraščių trikampių. Kiekviena jo viršūnė yra penkių trikampių viršūnė, o prie kiekvienos viršūnės esančių plokščiųjų kampų suma lygi 300^0. Taisyklingojo ikosaedro išklotinė pavaizduota 56 paveiksle.



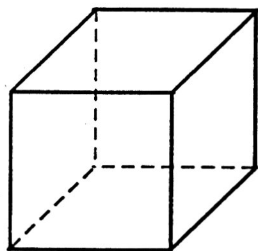
55 pav.



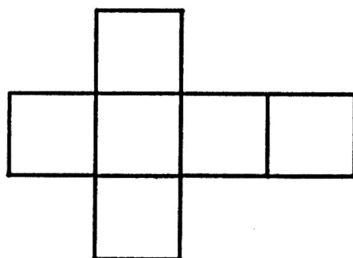
56 pav.

• **KUBAS (57 pav.).**

Jis sudarytas iš šešių kvadratų. Kiekviena jo viršūnė yra trijų kvadratų viršūnė, o prie kiekvienos viršūnės esančių plokščiųjų kampų suma lygi 270^0. Kubo išklotinė pavaizduota 58 paveiksle.



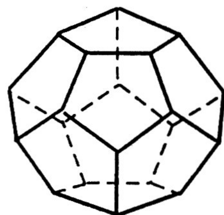
57 pav.



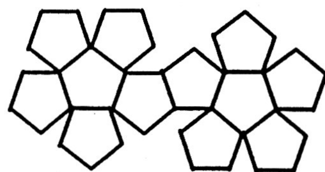
58 pav.

• TAISYKLINGASIS DODEKAEDRAS (59 pav.).

Jis sudarytas iš dvylikos taisyklingųjų penkiakampių. Kiekviena jo viršūnė yra trijų taisyklingųjų penkiakampių viršūnė, o prie kiekvienos viršūnės esančių plokščiųjų kampų suma lygi 324^0. Taisyklingojo dodekaedro išklotinė pavaizduota 60 paveiksle.



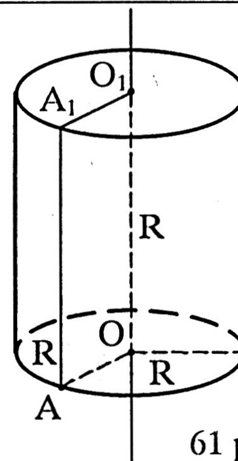
59 pav.



60 pav.

19. RITINYS

Kūnas, ribojamas cilindrinio paviršiaus ir dviejų skritulių, vadinamas **ritiniu** (61 pav.).



61 pav.

Cilindrinis paviršius vadinamas **ritinio šoniniu paviršiumi,** o skrituliai - **ritinio pagrindais.** Pagrindo spindulys vadinamas ritinio spinduliu. Atkarpa AA_1 (61 pav.), statmena pagrindams ir jungianti du pagrindų taškus A ir A_1, vadinama **ritinio sudaromąja. Ritinio visos sudaromosios lygiagrečios ir lygios.** Sudaromosios ilgis vadinamas **ritinio aukštine.** Tiesė OO_1 vadinama **ritinio ašimi.**

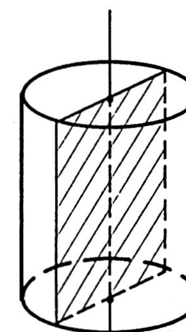
Ritinį galima gauti stačiakampį apsukus apie vieną jo kraštinę.

62 paveiksle pavaizduotas ritinys, gautas apsukus stačiakampį ABCD apie kraštinę AB.

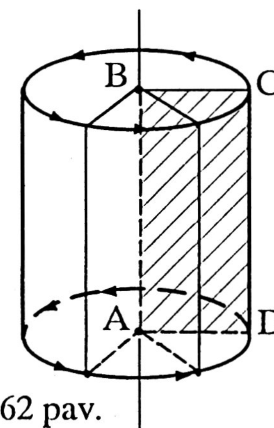
Ritinio pjūviai:

• AŠINIS PJŪVIS (63 pav)

Gaunamas ritinį perkirtus plokštuma, einančia per ritinio ašį. Pjūvis yra **stačiakampis,** kurio dvi kraštinės - ritinio sudaromosios, o kitos dvi - ritinio pagrindų skersmenys (63 pav.).



63 pav.

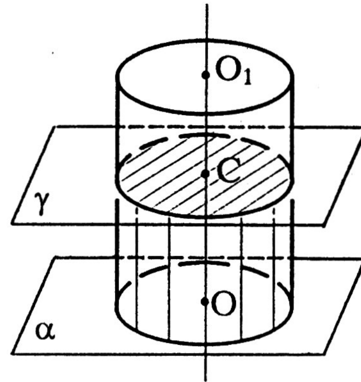


62 pav.

• PJŪVIS, GAUTAS PERKIRTUS RITINĮ PLOKŠTUMA, STATMENA JO AŠIAI (lygiagrečia pagrindams) (64 pav.).

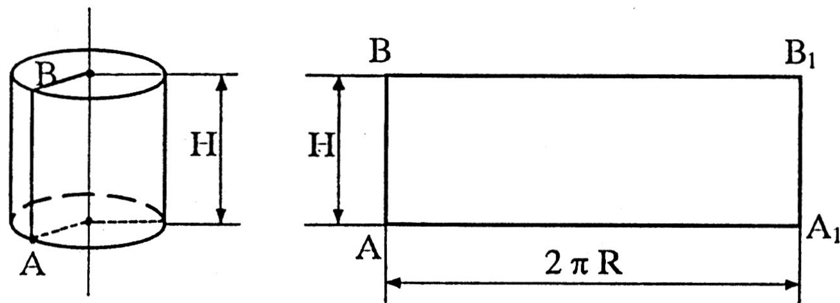
Gaunamas ritinį perkirtus plokštuma (kertamoji plokštuma), statmena ritinio ašiai. Pjūvis yra skritulys (64 pav.).

Ritinio ašiai statmena kertamoji plokštuma nuo nagrinėjamo ritinio nukerta kūną, kuris irgi yra ritinys. To ritinio pagrindai yra du skrituliai, kurio vienas nagrinėjamasis pjūvis.



64 pav.

Ritinio, kurio aukštinė yra H ir spindulys R, šoninio paviršiaus išklotinė



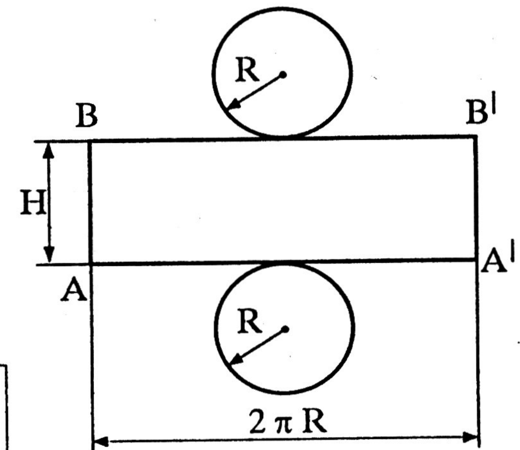
65 pav.

pavaizduota 65 paveiksle. Matome, kad šoninio paviršiaus išklotinė yra stačiakampis, kurio ilgis $2\pi R$, o plotis H.

Ritinio šoninio paviršiaus plotu laikomas jo šoninio paviršiaus išklotinės plotas.

64 paveiksle pavaizduoto ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus stačiakampio $ABB^{I}A^{I}$ plotui.

Visa ritinio išklotinė pavaizduota 66 paveiksle.



66 pav.

Ritinio paviršiaus plotu laikomas jo išklotinės plotas, t.y. stačiakampio ir dviejų skritulių plotų suma.

<u>Jei pažymėsime</u> :

R - ritinio spindulį;

H - ritinio aukštinę;

$S_{pagr.}$ - ritinio pagrindo plotą;

$S_{šon.}$ - ritinio šoninio paviršiaus plotą;

$S_{RIT.}$ - ritinio paviršiaus plotą;

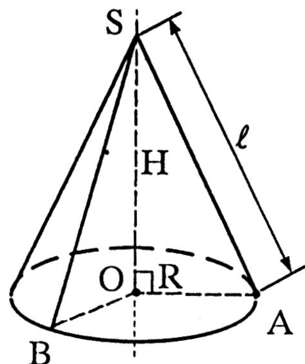
V - ritinio tūrį, tai:

$S_{pagr.} = \pi R^2$; $S_{šon.} = 2\pi RH$;

$S_{RIT.} = S_{šon.} + 2S_{pagr.}$; $S_{RIT.} = 2\pi R\,(R+H)$; $V = \pi R^2 H$

20. KŪGIS

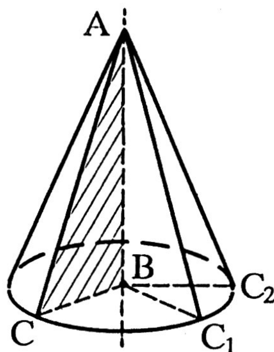
Kūnas, ribojamas kūginio paviršiaus ir skritulio, vadinamas **kūgiu** (67 pav.)



67 pav.

Kūginis paviršius vadinamas **kūgio šoniniu paviršiumi**, o skritulys - **kūgio pagrindu**. Taškas S vadinamas **kūgio viršūne**. Atkarpa, jungianti kūgio viršūnę su bet kuriuo pagrindo krašto (apskritimo) tašku, vadinama **kūgio sudaromąja**. 67 paveiksle pavaizduoto kūgio atkarpos SA ir SB yra jo sudaromosios. Kūgio sudaromoji žymima raide ℓ . Visos kūgio sudaromosios lygios. Tiesė SO , einanti per pagrindo centrą O ir viršūnę S, vadinama **kūgio ašimi**. Kūgio ašis yra statmena pagrindo plokštumai. Atkarpa SO vadinama **kūgio aukštinė** (67 pav.).

Kūgis gaunamas statųjį trikampį apsukus apie vieną jo statinį.
68 paveiksle pavaizduotas kūgis, gautas statųjį trikampį ABC apsukus apie statinį AB.

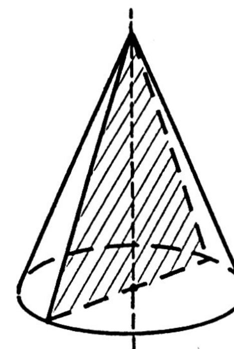


68 pav.

Kūgio pjūviai :

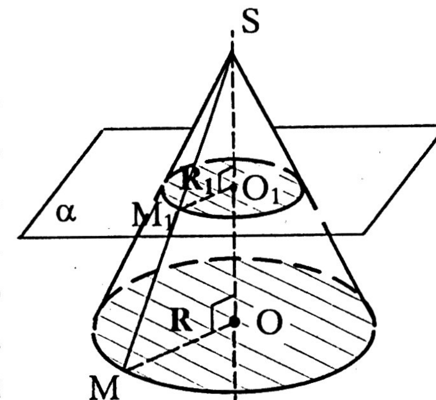
• AŠINIS PJŪVIS (68 pav.).

Gaunamas kūgį perkirtus plokštuma, einančia per kūgio ašį. Ašinis pjūvis yra lygiašonis trikampis, kurio pagrindas - kūgio pagrindo skersmuo, o šoninės kraštinės - kūgio sudaromosios.


68 pav.

• PJŪVIS, GAUTAS KŪGĮ PERKIRTUS PLOKŠTUMA, STATMENA JO AŠIAI (lygiagrečia pagrindo plokštumai)

Jei kūgį kerta plokštuma, statmena kūgio ašiai OS, tai kūgio pjūvis yra skritulys, kurio centras O_1 yra kūgio ašyje, o spindulys yra R_1. Pjūvio atstumas iki kūgio viršūnės yra atkarpos SO_1 ilgis. Atkarpa SO_1 yra mažesniojo kūgio , kurį atkerta nuo duotojo kūgio kertamoji plokštuma α, aukštinė. Kadangi statieji trikampiai SOM ir SO_1M_1 panašūs(turi po lygų kampą prie viršūnės S), tai $\frac{SO_1}{SO} = \frac{R_1}{R}$. Iš čia

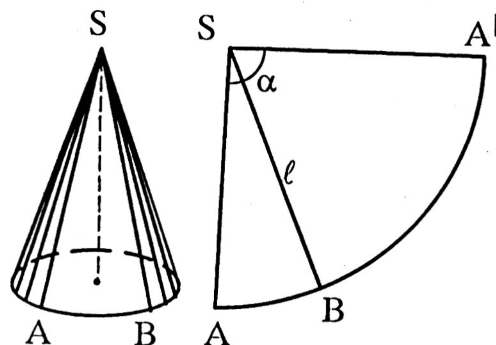


69 pav.

$$R_1 = \frac{SO_1}{SO} R$$;

čia SO - kūgio aukštinė (žr. 69 pav.).

Kūgio, kaip ir ritinio, šoninį paviršių galima iškloti plokštumoje.
Kūgio šoninio paviršiaus išklotinė (70 pav.) yra skritulio išpjova; skritulio spindulys lygus kūgio sudaromajai ℓ, o išpjovos lanko ilgis - kūgio pagrindo apskritimo ilgiui.



70 pav.

Kūgio šoninio paviršiaus plotu laikomas jo išklotinės plotas.

Kūgio šoninio paviršiaus plotas lygus

$$S_{šon.} = \frac{\pi \ell^2}{360}\alpha$$

čia α - lanko ABA^I laipsninis matas (70 pav.).

Kūgio paviršiaus plotas yra kūgio šoninio paviršiaus ploto ir pagrindo (skritulio) ploto suma.

Pažymėsime :

R - kūgio pagrindo spindulį;

H - kūgio aukštinę;

ℓ - sudaromąją;

$S_{pagr.}$ - kūgio pagrindo plotą;

$S_{šon.}$ - kūgio šoninio paviršiaus plotą;

$S_{K.}$ - kūgio paviršiaus plotą;

V - tūrį.

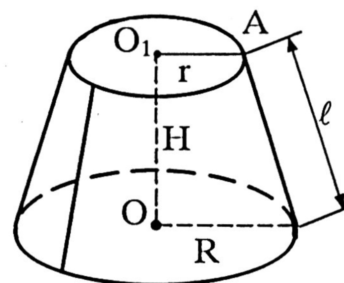
Tada :

$$S_{pagr.} = \pi R^2 \quad ; \quad S_{šon.} = \pi R \ell \quad ;$$

$$S_{K.} = S_{šon.} + S_{pagr.} \quad ; \quad S_{K.} = \pi R (R+\ell) \quad ;$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H .$$

21. NUPJAUTINIS KŪGIS.



71 pav.

Nupjautinis kūgis gaunamas kūgį perkirtus plokštuma, statmena ašiai (69 pav.). Pradinio kūgio pagrindas ir skritulys, gautas tą kūgį perkirtus plokštuma, vadinami **kūgio pagrindais.** Atkarpa, jungianti nupjautinio kūgio pagrindų centrus O ir O_1 ,vadinama **nupjautinio kūgio aukštine** (71 pav.). Šoninio paviršiaus ir per ašį einančios plokštumos sankirta yra dvi atkarpos, kurių kiekviena vadinama **nupjautinio kūgio sudaromąja.**

$AB=\ell$ - viena iš nupjautinio kūgio sudaromųjų (žr. 71 pav.).

Pažymėkime :

R - nupjautinio kūgio apatinio pagrindo spindulį;

r - nupjautinio kūgio viršutinio pagrindo spindulį;

H - nupjautinio kūgio aukštinę;

ℓ - nupjautinio kūgio sudaromąją;

S_1 - nupjautinio kūgio apatinio pagrindo plotą;

S_2 - nupjautinio kūgio viršutinio pagrindo plotą;

$S_{šon.}$ - nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotą;

$S_{N.K.}$ - nupjautinio kūgio paviršiaus plotą;

V - nupjautinio kūgio tūrį.

Tada :

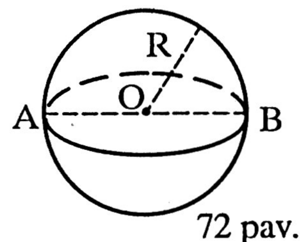
$S_{šon.} = \pi(R+r)\ell$; $S_{N.K.} = \pi(R+r)\ell+\pi R^2+\pi r^2$;

$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr)$; $S_{N.K.}=S_{šon.}+S_1+S_2$

22. SFERA.

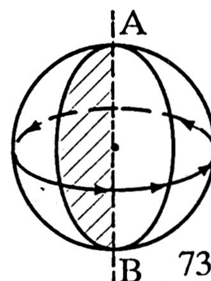
Sfera vadinamas paviršius, sudarytas iš visų erdvės taškų, vienodai nutolusių nuo vieno taško (72 pav.).

Tas taškas vadinamas **sferos centru**, o minėtas atstumas - **sferos spinduliu**. 72 pav. pavaizduotas sferos centras yra taškas O, o spindulys lygus R.



72 pav.

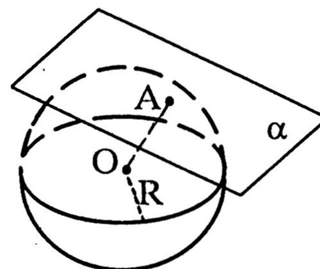
Atkarpa, jungianti du sferos taškus ir einanti per jos centrą, vadinama **sferos skersmeniu.** 72 pav. pavaizduotos sferos skersmuo yra atkarpa AB = 2R.



73 pav.

Sferą galime gauti pusapskritimį apsukus apie jo skersmenį.
73 pav. pavaizduota sfera, gauta pusapskritimį apsukus apie skersmenį AB.

Plokštuma, kuri su sfera turi tik vieną bendrą tašką, vadinama **sferos liečiamąja plokštuma**, o jų bendras taškas - plokštumos ir sferos **lietimosi tašku.**



74 pav.

74 paveiksle pavaizduota sferos, kurios centras O ir spindulys R, liečiamoji plokštuma α .

Sferos liečiamosios plokštumos savybė:

Teorema. Sferos spindulys, išvestas į sferos ir plokštumos lietimosi tašką, statmenas liečiamajai plokštumai.

Teorema teigia, kad jei plokštuma α taške A liečia sferą, kurios centras O (žr. 74 pav.), tai OA ⊥α ; čia OA=R - sferos spindulys.

Teisinga ir **atvirkštinė teorema** :

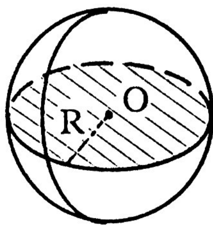
> **Teorema.** Jei sferos spindulys statmenas plokštumai, einančiai per spindulio galą, priklausantį sferai, tai ta plokštuma yra sferos liečiamoji plokštuma. (žr. 74 pav.).

Jei sferos spindulys yra R, tai sferos paviršiaus plotas apskaičiuojamas pagal formulę

$$S = 4\pi R^2$$

23. RUTULYS

> Kūnas, kurį riboja sfera, vadinamas **rutuliu.** Taigi rutulį, kurio spindulys yra R ir centras O, sudaro visi erdvės taškai, kurie nuo taško O nutolę per atstumą, ne didesnį už R (įskaitant ir tašką O) (žr. 75 pav.).



75 pav.

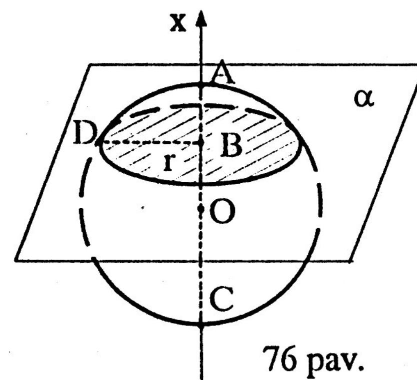
Rutulio, kurio spindulys R, tūris apskaičiuojamas pagal formulę

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

24. RUTULIO DALYS

• RUTULIO NUOPJOVA.

> **Rutulio nuopjova** vadinama rutulio dalis, kurią nuo jo nukerta kuri nors plokštuma.



76 pav.

BD=r
OA=R
AB=h

76 paveiksle rutulį kertanti plokštuma α eina per tašką B ir rutulį padalija į dvi rutulio nuopjovas. Pjūvio skritulys vadinamas kiekvienos tų **nuopjovų pagrindu,** o kertamajai plokštumai statmeno skersmens AC atkarpų AB ir BC ilgiai vadinami atitinkamų rutulio **nuopjovų aukštinėmis.**

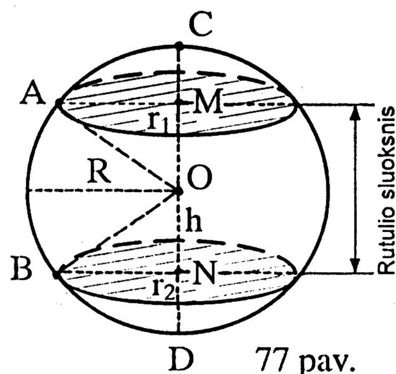
Jei rutulio spindulys R, nuopjovos aukštinė h (76 paveiksle AB=h), rutulio nuopjovos pagrindo spindulys r (76 paveiksle BD=r), nuopjovos paviršiaus plotas S, o tūris V, tai teisingos sekančios formulės :

$$S = 2\pi Rh \quad ; \quad V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3r^2)$$

• RUTULIO SLUOKSNIS

Rutulio sluoksniu vadinama rutulio dalis, esanti tarp dviejų lygiagrečių kertamųjų plokštumų.



77 pav.

Skrituliai, kurie gaunami lygiagrečiomis plokštumomis perkirtus rutulį, vadinami **rutulio sluoksnio pagrindais**, o atstumas tarp tų plokštumų - **rutulio sluoksnio aukštinė**.

Jei rutulio spindulys R, rutulio sluoksnio aukštinė h . (77 paveiksle MN=h), apatinio pagrindo spindulys r_2 (77 paveiksle BN=r_2), viršutinio pagrindo spindulys r_1 (77 paveiksle AM=r_1), rutulio sluoksnio paviršiaus plotas S, o tūris V, tai

$$S=2\pi Rh \quad ; \quad V=\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi(r_1^2+r_2^2)h$$

Pastaba. Rutulio sluoksnio tūrį galima apskaičiuoti kaip dviejų rutulio nuopjovų tūrių skirtumą. Pavyzdžiui, 77 paveiksle pavaizduoto rutulio sluoksnio tūris lygus rutulio nuopjovų, kurių aukštinės NC ir MC tūrių skirtumui. Jeigu duoti rutulio sluoksnio pagrindų spinduliai r_1 ir r_2 bei rutulio spindulys R, tai rutulio sluoksnio tūrį galima rasti ir tokiu būdu : 1) Randame rutulio tūrį $V_{rut.}=\frac{4}{3}\pi R^3$; čia R=OA=OB - rutulio spindulys (žr. 77 pav).

2) Randame rutulio nuopjovos, kurios aukštinė yra h_1=MC, o pagrindo

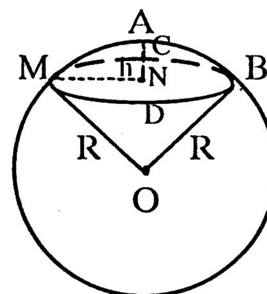
spindulys r_1=AM tūrį V_1 : $V_1=\pi h_1^2\left(R-\frac{1}{3}h_1\right)$. Rasime nuopjovos aukštinę h_1. Turime : h_1=OC - OM=R - OM. Bet $OM=\sqrt{AO^2-AM^2}=\sqrt{R^2-r_1^2}$ (iš stataus trikampio AOM), todėl $h_1=R-\sqrt{R^2-r_1^2}$.

3) Analogiškai randame rutulio nuopjovos, kurios aukštinė yra h_2=ND, o pagrindo spindulys r_2=BN tūrį V_2 : $V_2=\pi h_2^2\left(R-\frac{1}{3}h_2\right)$. Randame nuopjovos aukštinę h_2. Turime : h_2=OD-ON=R-ON. Bet $ON=\sqrt{OB^2-BN^2}=\sqrt{R^2-r_2^2}$ (iš stataus trikampio BON), todėl $h_2=R-\sqrt{R^2-r_2^2}$.

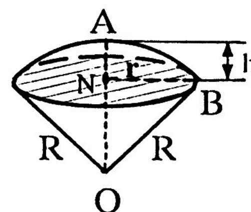
4) Ieškomasis rutulio sluoksnio tūris lygus $V_{sl}=V_{rut}-(V_1+V_2)$.

• RUTULIO IŠPJOVA.

Rutulio išpjova vadinama rutulio dalis, apribota rutulio nuopjovos MCBDA (žr. 78 pav.) rutuliniu paviršiumi ir kūginiu paviršiumi OMCBD, kurio pagrindas yra nuopjovos pagrindas MCBD, o viršūnė - rutulio centras.



78 pav.



79 pav.

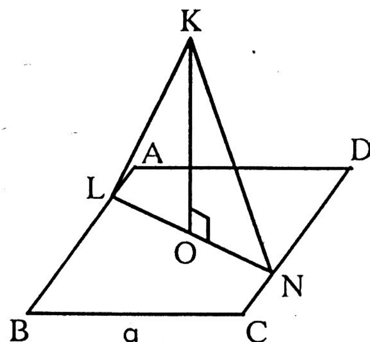
Rutulio išpjova galima gauti skritulio išpjovą OAB (žr. 79 pav.), kurios kampas mažesnis už 90^0, apsukus apie tiesę, einančią per vieną skritulio išpjovą ribojančių spindulių (79 paveiksle apie spindulį OA).

Jei rutulio spindulys yra R, o rutulio nuopjovos aukštinė lygi h (79 paveiksle atkarpa AN=h), tai rutulio išpjovos tūrio formulė yra

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2 h$$

STEREOMETRIJOS UŽDAVINIŲ SPRENDIMO PAVYZDŽIAI

1 uždavinys. Rombo kraštinė lygi a, o jo smailusis kampas lygus 45^0. Erdvės taškas K yra nutolęs atstumu b nuo rombo kraštinių. Rasti to taško atstumą iki rombo plokštumos.

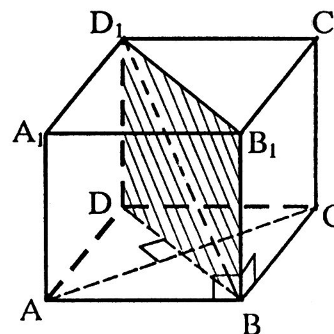


80 pav.

Sakykime, ABCD - rombas, kurio $AB=BC=CD=AD=a$, $\angle D=45^0$ (80 pav.). Nubrėžiame tiesę KO, statmeną plokštumai ABCD. Kadangi atstumu nuo taško iki tiesės laikomas statmens, išvesto iš to taško į nagrinėjamą tiesę, ilgis, tai statmenų, nubrėžtų iš taško K į rombo kraštines AB bei CD, ilgiai ir yra taško K atstumai iki minėtų rombo kraštinių. Taigi $KL \perp AB$, $KN \perp CD$ ir pagal uždavinio sąlygą $KL=KN=b$. Remiantis trijų statmenų teorema, $OL \perp AB$, $ON \perp CD$ (OL ir ON yra pasvirųjų KL ir KN projekcijos rombo plokštumoje ABCD). Kadangi $AB \parallel CD$, tai laužtė LON yra atkarpa, statmena rombo kraštinėms AB ir CD. Šios atkarpos LN ilgis lygus rombo aukštinės ilgiui. Vadinasi, $LN=a\sin45^0=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Kadangi trikampis LKN lygiašonis, tai $OL=ON=\frac{LN}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Iš stačiojo trikampio OKL, remdamiesi Pitagoro teorema, randame : $OK=\sqrt{KN^2-ON^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{8}}$.

Atsakymas $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{8}}$.

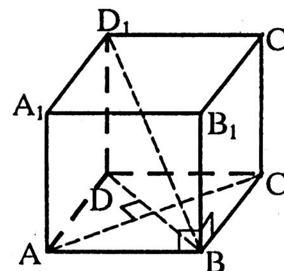
2 uždavinys. Įrodykime, kad taisyklingosios keturkampės prizmės pagrindo įstrižainė AC statmena plokštumai BB_1D_1D.



81 pav.

Įrodymas. Pakanka įrodyti, kad tiesė AC statmena kurioms nors dviem plokštumos BB_1D_1D susikertančioms tiesėms (žr. tiesės ir plokštumos statmenumo požymį)(81 pav.). Kadangi ABCD - kvadratas, tai $AC \perp BD$. Įrodysime, kad $AC \perp BB_1$. Duotoji prizmė yra taisyklingoji, todėl $BB_1 \perp ABCD$. Iš tiesės ir plokštumos statmenumo apibrėžimo išplaukia, kad $BB_1 \perp AC$. Vadinasi, tiesė AC statmena dviem plokštumos BB_1D_1D susikertančioms tiesėms BD ir BB_1. Pagal tiesės ir plokštumos statmenumo požymį tiesė AC yra statmena plokštumai BB_1D_1D. **Tai ir reikėjo įrodyti.**

3 uždavinys. Įrodykime, kad kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainė BD_1 statmena pagrindo ABCD įstrižainei AC.

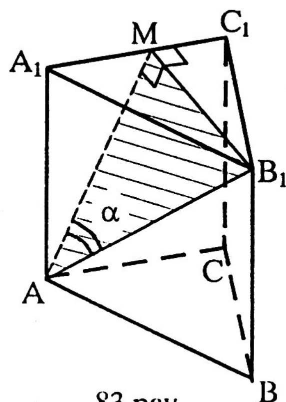


82 pav.

Įrodymas.

Tiesė BD yra pasvirosios BD_1 projekcija plokštumoje ABCD, nes $D_1D \perp ABCD$ (82 pav.). Kadangi pagrindas ABCD - kvadratas, tai, $AC \perp BD$. Remiantis trijų statmenų teorema, jei tiesė AC statmena pasvirosios BD_1 projekcijai plokštumoje ABCD, t.y. tiesei BD, tai AC statmena ir pačiai pasvirajai BD_1. **Tai ir reikėjo įrodyti.**

4 uždavinys. Taisyklingoje trikampėje prizmėje $ABCA_1B_1C_1$ $AA_1=AB$. Rasti kampą tarp prizmės įstrižainės AB_1 ir plokštumos AA_1C_1C.



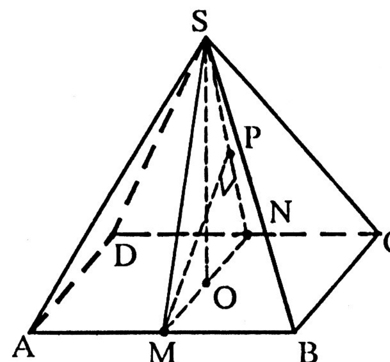
83 pav.

Sprendimas. Nubraižysime tiesės AB_1 projekciją plokštumoje AA_1C_1C (83 pav.). Plokštumos $A_1B_1C_1$ ir AA_1C_1C statmenos (prizmė stačioji), todėl statmuo B_1M į tiesę A_1C_1 yra taip pat ir statmuo į plokštumą AA_1C_1C. Tiesė AM yra statmenoji tiesės AB_1 projekcija plokštumoje AA_1C_1C. Kampas tarp tiesės AB_1 ir plokštumos AA_1C_1C yra kampas tarp tiesės AB_1 ir jos statmenosios projekcijos plokštumoje AA_1C_1C, t.y. tiesės AM. Šį kampą pažymėkime α : $\alpha=\angle B_1AM$. Sakykime, $AB=a$. Tada $AA_1=a$, o $AB_1=a\sqrt{2}$. Lygiakraščio trikampio $A_1B_1C_1$ aukštinė B_1M lygi $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Remdamiesi Pitagoro teorema, iš stačiojo trikampio B_1AM gauname $\sin\alpha=\frac{B_1M}{AB_1}$; $\sin\alpha=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Vadinasi, $\alpha=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Atsakymas. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$.

5 uždavinys. Taisyklingosios keturkampės piramidės SABCD aukštinė ir pagrindo kraštinė lygios a. Rasti atstumą nuo tiesės AB iki plokštumos SCD.



Sprendimas.

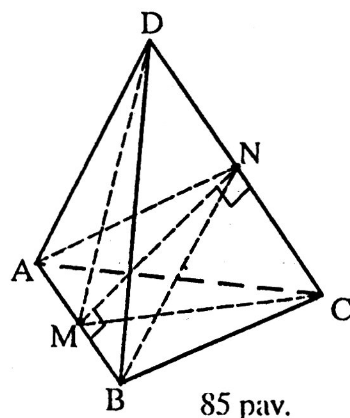
Išveskime plokštumą, einančią per piramidės viršūnę S ir pagrindo kraštinių AB ir CD vidurio taškus M ir N (žr. 84 pav.). Ši plokštuma statmena plokštumai SCD. Statmuo MP, išvestas iš taško M į tiesę SN, yra taip pat ir statmuo į plokštumą SCD. Jo ilgis lygus atstumui nuo tiesės AB iki plokštumos SCD. Piramidės aukštinė SO ir atkarpa MP yra trikampio SMN aukštinės. Kadangi pagal uždavinio sąlygą $MN=a$ ir $SO=a$, tai; remdamiesi Pitagoro teorema, iš stačiojo trikampio SON gauname $SN=\sqrt{SO^2+ON^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$. Turime :

$S_{\Delta SMN}=\frac{1}{2}MN\cdot SO$, o antra vertus, $S_{\Delta SMN}=\frac{1}{2}SN\cdot MP$. Vadinasi, $\frac{1}{2}MN\cdot SO=\frac{1}{2}SN\cdot MP$. Iš paskutinės lygybės randame $MP=\frac{MN\cdot SO}{SN}=\frac{2}{\sqrt{5}}a$.

Atsakymas. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

6 uždavinys. Tetraedro ABCD briaunų AB ir CD ilgiai lygūs a, o kitų briaunų - b. Rasti atstumą tarp tiesių AB ir CD.

Sakykime, M ir N - briaunų AB ir CD vidurio taškai (žr. 85 pav.). Tiesės AB ir CD yra prasilenkiančios. Kadangi pagal sąlygą $AC=BC=b$ ir $AB=AD=b$, tai trikampiai ABC ir ABD yra lygiašoniai, o atkarpos CM ir DM - jų aukštinės. Iš trikampių ACM ir ADM, remiantis Pitagoro teorema, $CM=DM=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$.



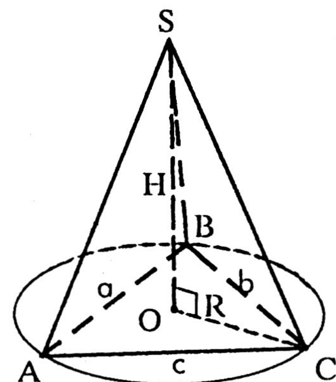
85 pav.

Vadinasi, trikampis CMD lygiašonis, todėl $MN \perp CD$. Analogiškai įrodome, kad trikampis ANB taip pat lygiašonis (AN=NB), todėl $MN \perp AB$. Taigi MN - bendrasis tiesių AB ir CD statmuo . Pagal atstumo tarp prasilenkiančių tiesių apibrėžimą statmuo MN - atstumas tarp prasilenkiančių tiesių AB ir CD. Iš stataus trikampio CMN randame

$$MN = \sqrt{CM^2 - CN^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

Atsakymas. $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$.

7 uždavinys. Piramidės pagrindas yra trikampis, kurio kraštinių ilgiai 5, 7 ir 8, o visos šoninės briaunos vienodos ir lygios $\frac{1}{3}\sqrt{174}$.
Reikia apskaičiuoti piramidės tūrį.



86 pav.

Sprendimas.

Pažymėkime trikampio kraštines : $a=AB=5$ cm , $b=BC=7$ cm , $c=AC=8$ cm . Kadangi piramidės šoninės briaunos yra lygios, tai viršūnės projekcija sutampa su apibrėžto aplink pagrindą apskritimo centru (žr. 86 pav.). Todėl piramidės aukštinę SO=H galima

apskaičiuoti kaip statinį trikampio SOC, kurio kitas statinis OC yra minėto apskritimo spindulys R, o įžambinė - šoninė briauna $SC=\ell$: $H=\sqrt{\ell^2 - R^2}$.

Tačiau $R = \frac{abc}{4S}$, t.y. spindulys lygus visų trikampio kraštinių sandaugai, padalytai iš keturgubo ploto. Trikampio ABC plotą rasime remdamiesi Herono formule $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; čia $p = \frac{a+b+c}{2}$ - pusperimetris.

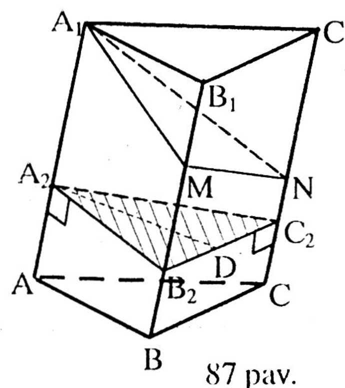
Turime: $p = \frac{5+7+8}{2} = 10$, $S = \sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)} = 10\sqrt{3}$. Vadinasi,

$R = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 10\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. Tada $H = \sqrt{\ell^2 - R^2}$, $H = \sqrt{\frac{1}{9}174 - \frac{1}{9}147} = \sqrt{3}$.

Piramidės tūris $V = \frac{1}{3} S_{pagr.} \cdot H$. Žinome, kad $S_{pagr.} = 10\sqrt{3}$ (gavome, skaičiuodami R). Taigi $V = \frac{1}{3} 10\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 10$.

Atsakymas. 10 .

8 uždavinys. Trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ tūris lygus V. Briaunose BB_1 ir CC_1 pažymėkime taškus M ir N taip, kad $BM : BB_1 = m$, $CN : CC_1 = n$.
Raskite briaunainio $ABCA_1MN$ tūrį.



87 pav.

Sprendimas.

Tegul $A_2B_2C_2$ - prizmės statmenasis pjūvis (žr. 87 pav.), o A_2D - šio pjūvio aukštinė. Pažymėsime $AA_1=\ell$, $B_2C_2=a$, $A_2D=h$. Turime $BM=m\ell$, $CN=n\ell$, $B_1M=(1-m)\ell$, $C_1N=(1-n)\ell$. Rasime piramidės $A_1B_1C_1NM$ tūrį. Jos

pagrindas - trapecija B_1C_1NM. Šios trapecijos aukštinė lygi B_2C_2 , t.y. a. Randame trapecijos plotą :

$$S_{tr.}=\frac{1}{2}(B_1M+C_1N)\cdot a=\frac{2-m-n}{2}a\ell .$$

Pastebėkime, kad atkarpa A_2D statmena plokštumai BB_1C_1C, todėl piramidės $A_1B_1C_1NM$ aukštinė, išvesta iš viršūnės A_1, lygi $A_2D=h$.

Vadinasi, jeigu V_1 - piramidės $A_1B_1C_1NM$ tūris, tai

$$V_1=\frac{1}{3}hS_{tr.}=\frac{1}{6}(2-m-n)\ell ah.$$

Prizmės statmenojo pjūvio plotas $S=\frac{1}{2}ah$. Tada visos prizmės tūris $V=\frac{1}{2}\ell ah$.

Palyginę V_1 ir V išraiškas matome, kad $V_1=\frac{1}{3}(2-m-n)V$. Randame briaunainio $ABCA_1MN$ tūrį V_2 :

$$V_2=V-V_1=\frac{1+m+n}{3}V$$

Atsakymas. $\frac{1+m+n}{3}V$.

> **9 uždavinys**. Nupjautinės piramidės tūris lygus 1720 cm^3 , aukštinė 20 cm. Atitinkamos pagrindų kraštinės sutinka kaip 5:8. Rasti pagrindų plotus.

Sprendimas. Nupjautinės piramidės pagrindai yra panašieji daugiakampiai. Sakykime, apatinio pagrindo plotas lygus S_1, o viršutinio - S_2. Žinome, kad panašiųjų daugiakampių (šiuo atveju - piramidės pagrindų) plotų santykis lygus atitinkamų jo kraštinių santykio kvadratui. Kadangi pagal sąlygą pagrindų kraštinių santykis lygus $\frac{5}{8}$, tai $\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{25}{64}$. Iš čia $S_2=\frac{25}{64}S_1$.

Nupjautinės piramidės tūris $V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$, kur H - nupjautinės piramidės aukštinė. Įrašę gautąją S_2 išrašką į tūrio formulę, turime

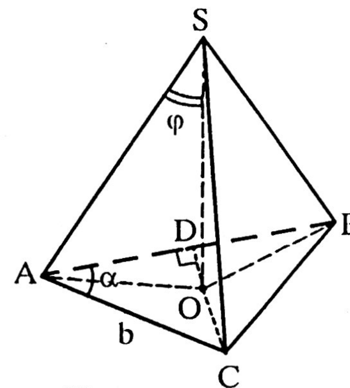
$$V=\frac{1}{3}H\left(S_1+\frac{25}{64}S_1+\sqrt{S_1\cdot\frac{25}{64}S_1}\right)=\frac{1}{3}H\frac{129}{64}S_1=\frac{43}{64}HS_1 .$$ Iš čia $$S_1=\frac{64V}{43H} .$$

Kadangi pagal sąlygą $V=1720$ cm^3, o $H=20$ cm, tai $S_1=\frac{64\cdot 1720}{43\cdot 20}=128$ cm^3 .

Tada $S_2=\frac{25}{64}S_1=\frac{25}{64}\cdot 128=50$ cm^2 .

Atsakymas. 128 cm^2 , 50 cm^2 .

> **10 uždavinys**. Piramidės pagrindas yra lygiašonis trikampis, kurio šoninės kraštinės lygios b, o kampas tarp jų lygus α. Rasti piramidės tūrį, jeigu visos šoninės briaunos su piramidės aukštine sudaro kampą φ.



88 pav.

Sprendimas.

Sakykime, $SABC$ - duotoji piramidė, SO - piramidės aukštinė, $AB=AC=b$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle ASO=\angle BSO=\angle COS=\varphi$ (žr. 88 pav.). Įrodysime, kad piramidės viršūnės S projekcija į pagrindo plokštumą yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras O. Piramidės viršūnė SO statmena trikampio ABC plokštumai priklausančioms tiesėms AO, BO, CO, todėl trikampiai ASO, BSO ir CSO yra statieji, SO - jų bendroji kraštinė, o kampai prie viršūnės S pagal sąlygą lygūs φ. Vadinasi, visi šie trikampiai lygūs ir priešais lygius šių trikampių kampus yra lygios kraštinės : $AO=OB=OC$. Taigi

taškas O vienodai nutolęs nuo visų trikampio ABC viršūnių ir todėl yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras.

Rasime apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo spindulį, t.y. atkarpos AO ilgį. Aišku, kad trikampis AOB yra lygiašonis (AO=OB). Iš viršūnės O išveskime aukštinę OD. Turime : Δ OAD - statusis, $AD=\frac{AB}{2}=\frac{b}{2}$,

$\angle OAD=\frac{\alpha}{2}$. Iš stačiojo trikampio OAD randame $AO=\frac{AD}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{b}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Iš stačiojo trikampio ASO rasime aukštinę SO : $SO=AO\cdot ctg\varphi=\frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot ctg\varphi$.

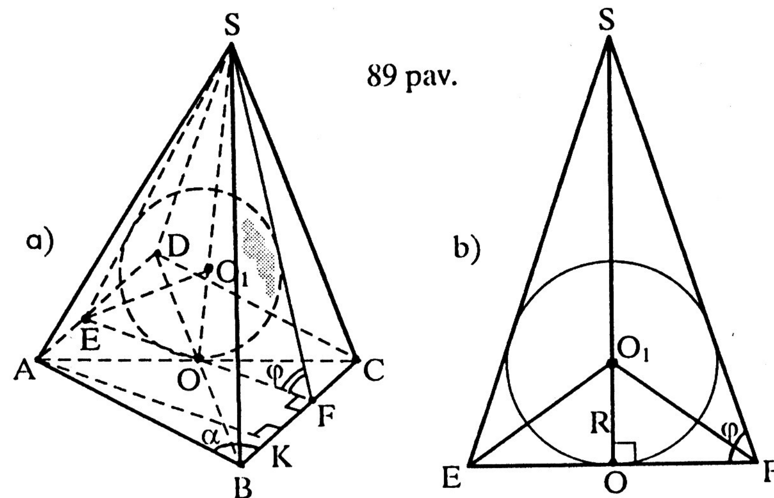
Piramidės pagrindo plotas $S_{pagr.}=\frac{1}{2}\ b^2\sin\alpha$. Tada piramidės tūris

$$V_{pir.}=\frac{1}{3}S_{pagr.}\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}b^2\sin\alpha\cdot\frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}ctg\varphi=\frac{1}{6}b^3\sin\frac{\alpha}{2}ctg\varphi .$$

Atsakymas. $\frac{1}{6}b^3\sin\frac{\alpha}{2}ctg\varphi$.

11 uždavinys. Į piramidę, kurios pagrindas yra rombas su smailiuoju kampu α, įbrėžtas spindulio R rutulys. Piramidės šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro vieną ir tą patį kampą φ. Rasti piramidės tūrį.

Sprendimas. Iš piramidės SABCD viršūnės S išveskime aukštinę SO, o iš pagrindo (rombo) viršūnės A išveskime rombo aukštinę AK (žr. 89 pav.a). Per pagrindo įstrižainių susikirtimo tašką O (rutulio pagrindo plokštumos lietimosi tašką) išveskime atkarpą EF, lygiagrečią pagrindo aukštinei AK. Aišku, kad EF=AK - pagrindo aukštinė. Pagal sąlygą $\angle ABC=\alpha$ - rombo smailusis kampas.



89 pav.

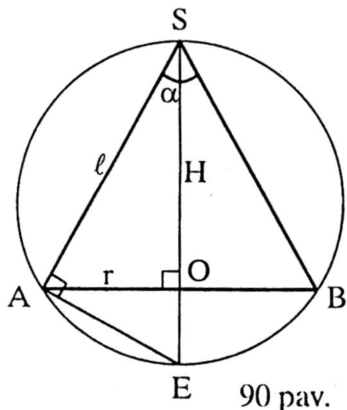
Kampai SFE ir SEF yra dvisienių kampų, kuriuos sudaro šoninės sienos SBC ir SAD su pagrindo plokštuma, tiesiniai kampai. Pagal sąlygą $\angle SFE=\angle SEF=\varphi$. Vadinasi, trikampis SEF - lygiašonis (kampai prie pagrindo lygūs). Rutulio centras O_1 yra piramidės aukštinės ir kampo SEF pusiaukampinės EO_1 susikirtimo taškas. Jeigu nagrinėtume piramidės pjūvį, gautą perkirtus ją plokštuma, einančią per piramidės viršūnę S, aukštinę SO ir atkarpą EF, tai pjūvis yra į lygiašonį trikampį SEF įbrėžtas skritulys, kurio centras O_1 (žr. 89 pav. b). Piramidės tūris $V_{pir.}=\frac{1}{3}S_{pagr.}\cdot H=\frac{1}{3}AB\cdot EF\cdot SO$. Rasime pagrindo kraštinę AB, aukštinę EF ir piramidės aukštinę H=SO. Iš stačiojo trikampio ABK randame AB : $AB=\frac{AK}{\sin\alpha}=\frac{EF}{\sin\alpha}$ (1) (AK=EF). Iš stačiojo trikampio O_1OF rasime OF : $OF=OO_1\cdot ctg\frac{\varphi}{2}=R\cdot ctg\frac{\varphi}{2}$, čia $R=OO_1$ - rutulio spindulys (žr. 89 pav. b). Tada $EF=2OF=2Rctg\frac{\varphi}{2}$ (2). (2) išraišką įrašome į (1) vietoje EF ir gauname, kad rombo kraštinė $AB=\frac{2Rctg\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha}$ (3).

Iš stačiojo trikampio SOF randame piramidės aukštinę SO : $SO = OF\text{tg}\varphi = R\text{ctg}\frac{\varphi}{2}\text{tg}\varphi$ (4). Surašę (2), (3) ir (4) išraiškas į anksčiau gautas piramidės tūrio išraišką, turime

$$V_{pir.} = \frac{1}{3}\frac{2R\text{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha}\cdot 2R\text{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot R\text{ctg}\frac{\varphi}{2}\text{tg}\varphi = \frac{4R^3\text{ctg}^3\frac{\varphi}{2}\text{tg}\varphi}{3\sin\alpha}.$$

Atsakymas. $\frac{4R^3\text{ctg}^3\frac{\varphi}{2}\text{tg}\varphi}{3\sin\alpha}$.

12 uždavinys. Į spindulio R rutulį įbrėžtas kūgis. Kūgio ašinio pjūvio kampas prie viršūnės lygus α. Rasti kūgio aukštinę, sudaromąją ir pagrindo spindulį.



90 pav.

Sprendimas.

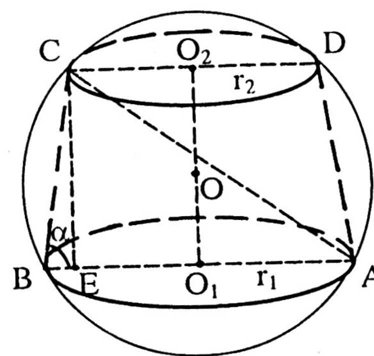
Rutulį perkirskime plokštuma, einančia per kūgio ašį. Pjūvis yra rutulio didysis skritulys, į kurį įbrėžtas lygiašonis trikampis ABS (žr. 90 pav.). Lygiašonio trikampio kampas prie viršūnės pagal sąlygą lygus α, kraštinės AS ir SB yra kūgio sudaromosios, o pagrindas AB - kūgio pagrindo skersmuo. Kūgio aukštinę SO pratęskime iki susikirtimo su didžiuoju skrituliu. Kūgio ašis SO kerta skritulį taške E. Trikampio ESA kampas SAE - status, nes jis remiasi į skritulio skersmenį. Taigi trikampis ESA statusis, jo įžambinė SE=2R, $\angle ASE=\frac{\alpha}{2}$ (SO - lygiašonio trikampio ASB kampo S pusiaukampinė), statinis AS=ℓ - kūgio sudaromoji. Iš stataus trikampio ESA

$AS=2R\cos\frac{\alpha}{2}$. Iš stataus trikampio AOS randame kūgio pagrindo spindulį r=AO ir aukštinę H=SO : $r=AO=AS\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=2R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=R\sin\alpha$,

$H=SO=AS\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=2R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2R\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Atsakymas. $2R\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $2R\cos\frac{\alpha}{2}$, $R\sin\alpha$.

13 uždavinys. Nupjautinio kūgio apatinio pagrindo spindulys lygus r_1, o viršutinio - r_2. Kūgio sudaromoji su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Rasti apie tokį nupjautinį kūgį apibrėžto rutulio spindulį.



91 pav.

Sprendimas.

Rutulio pjūvis, gautas jį perkirtus plokštuma, einančia per nupjautinio kūgio ašį O_1O_2 (žr. 91 pav.), yra didysis rutulio skritulys, į kurį įbrėžta trapecija ABCD. Nagrinėsime trikampį ABC, kuris taip pat yra įbrėžtas į didįjį rutulio skritulį. Šiame trikampyje ∠CBA=α . Iš trikampio ABC, remiantis sinusų teorema, $\frac{AC}{\sin\alpha}=2R$, t.y AC=2Rsinα. Vadinasi, tam, kad rastume rutulio spindulį R, reikia apskaičiuoti AC. Iš taško C nuleisime statmenį CE į kraštinę AB. Aišku, kad $AO_1=r_1$, o $DO_2=r_2$. Todėl $AE=r_1+r_2$, $BE=r_1-r_2$. Iš stataus trikampio BCE $CE=(r_1-r_2)\text{tg}\alpha$, todėl pagal Pitagoro teoremą :

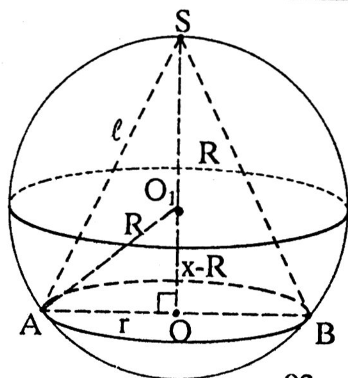
$$AC=\sqrt{AE^2+CE^2}=\sqrt{(r_1+r_2)^2+(r_1-r_2)^2+tg^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{(r_1+r_2)^2\cos^2\alpha+(r_1-r_2)^2\sin^2\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos2\alpha}\,.$$

Vadinasi, $R=\dfrac{AC}{2\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos2\alpha}}{\sin2\alpha}$.

Atsakymas. $\dfrac{\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos2\alpha}}{\sin2\alpha}$.

14 uždavinys. Į spindulio R rutulį reikia įbrėžti kūgį, kuris turėtų didžiausią šoninio paviršiaus plotą. Kokia turi būti kūgio aukštinė? Kam lygus didžiausias šoninio paviršiaus plotas?



92 pav.

Sprendimas.

Į rutulį, kurio centras yra O_1 ir spindulys R, įbrėžto kūgio aukštinę SO (žr. 92 pav.) pažymėkime x : SO=x. Iš brėžinio matome, kad $AO_1=SO_1=R$. Kūgio sudaromoji $\ell=AS$, o pagrindo spindulys r=AO. Iš brėžinio randame atkarpos OO_1 ilgį: $OO_1=SO-SO_1=x-R$.

Iš stataus trikampio AOO_1, remiantis Pitagoro teorema, $r=\sqrt{R^2-(x-R)^2}=\sqrt{2xR-x^2}$. Iš stataus trikampio ASO, remiantis Pitagoro teorema, kūgio sudaromoji $\ell=\sqrt{x^2+r^2}$. Į šią lygybę įrašę gautąją r išraišką turime : $\ell=\sqrt{x^2+(\sqrt{2xR-x^2})^2}=\sqrt{x^2+2xR-x^2}=\sqrt{2xR}$.

Vadinasi, kūgio šoninio paviršiaus plotas $S_{šon}=\pi r\ell=\pi\sqrt{2xR(2xR-x^2)}$.

Nagrinėsime funkciją $f(x)=2xR(2xR-x^2)$ ir rasime jos didžiausiąją reikšmę

atkarpoje [0 ; 2R]. Aišku, kad su šia x reikšme kūgio šoninio paviršiaus plotas bus didžiausias. Rasime funkcijos f(x) išvestinę : $f'(x)=2Rx(4R-3x)$.

Randame funkcijos f(x) kritinius taškus : $f'(x)=0$; $2Rx(4R-3x)=0$, kai $x=0$ ir $x=\frac{4R}{3}$. Norint rasti funkcijos f(x) didžiausią reikšmę atkarpoje [0 ; 2R], reikia apskaičiuoti funkcijos reikšmes atkarpos galuose bei kritiniuose taškuose ir iš visų gautųjų reikšmių išrinkti didžiausią.

Turime : $f(0)=2\cdot0\cdot R(2\cdot0R-0^2)=0$, $f(2R)=2\cdot2R\cdot R(2\cdot2R\cdot R-(2R)^2)=0$,

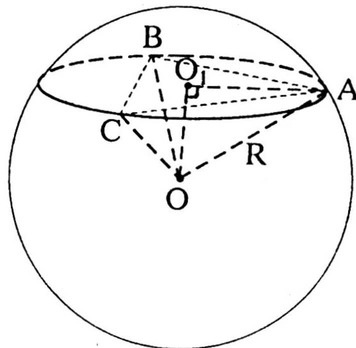
$f\left(\frac{4R}{3}\right)=2\cdot\frac{4R}{3}\cdot R\left(2\frac{4R}{3}R-\left(\frac{4R}{3}\right)^2\right)=\frac{8}{3}R^2\left(\frac{8R^2}{3}-\frac{16R^2}{9}\right)=\frac{64}{27}R^4$. Matome, kad didžiausiąją reikšmę funkcija f(x) įgyja kritiniame taške $x=\frac{4R}{3}$. Vadinasi, kai kūgio aukštinė lygi $\frac{4R}{3}$, tai jo šoninio paviršiaus plotas $S_{šon.}$ yra didžiausias. Įrašę šią reikšmę į anksčiau gautąją $S_{šon}$ išraišką, randame ieškomąjį didžiausią šoninio paviršiaus plotą :

$$S_{šon.didž.}=\pi\sqrt{2\cdot\frac{4R}{3}R\left(2\frac{4R}{3}R-\left(\frac{4R}{3}\right)^2\right)}=\pi\sqrt{\frac{64}{27}R^4}=\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}R^2\,.$$

Atsakymas. $\frac{4R}{3}$, $\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}R^2$.

15 uždavinys. Taškai A, B ir C išsidėstę sferos paviršiuje taip, kad, sujungę juos tiesių atkarpomis, gauname trikampį, kurio kraštinės lygios 5, 7 ir 8 cm. Sferą kertame plokštuma, einančia per minėtus taškus ir nutolusia nuo sferos centro $\frac{7}{3}$ cm atstumu. Raskime sferos spindulį.

__Sprendimas__. Plokštumos, einančios per taškus A, B, C ir sferos susikirtimas yra apskritimas, į kurį įbrėžtas trikampis ABC. Apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulį O_1A (žr. 93 pav.) rasime, remdamiesi formule



93 pav.

$r = O_1A = \frac{abc}{4S}$; čia a, b, c - trikampio ABC kraštinės, S - trikampio ABC plotas.

Remiantis Herono formule, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

kur $p = \frac{a+b+c}{2}$ - trikampio pusperimetris.

Turime : $p = \frac{5+7+8}{2} = 10$ cm,

$S = \sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)} = 10\sqrt{3}$ cm^2. Tada $O_1A = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 10\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$ cm.

Iš stačiojo trikampio AOO_1, remiantis Pitagoro teorema, gauname $R = OA = \sqrt{O_1A^2 + O_1O^2}$. Pagal sąlygą $O_1O = \frac{7}{3}$cm. Tada

$$R = \sqrt{\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{3} + \frac{49}{9}} = \frac{14}{3} \text{ cm}.$$

__Atsakymas__. $\frac{14}{3}$ cm.

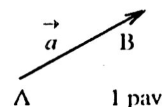
VEKTORIAI

1. PAGRINDINĖS SĄVOKOS.

- **Vektorius** yra kryptinė atkarpa, t.y. atkarpa, turinti atitinkamą ilgį ir kryptį.

1pav. pavaizduotas vektorius $\vec{a}$; jeigu taškas A yra šio vektoriaus **pradžia**, o taškas B - šio vektoriaus pabaiga, tai vektorius žymimas $\overrightarrow{AB}$; spindulio AB kryptis vadinama **vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ kryptimi,** o atkarpos AB ilgis - **vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgiu (moduliu, absoliutiniu didumu).** Vektoriaus $\vec{a}$ ilgis (modulis) žymimas $|a|$.

Jeigu vektoriaus pradžia sutampa su jo pabaiga, tai vektorius vadinamas **nuliniu** (žymima 0 arba $\vec{0}$). Nulinio vektoriaus ilgis lygus nuliui.



1 pav.

Vienetinis yra toks vektorius, kurio ilgis lygus vienetui.

- Du nenuliniai vektoriai vadinami **kolinearaisiais** jeigu jie yra vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse.

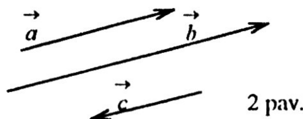
Kolinearūs vektoriai gali būti :

– **vienakrypčiai** (vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{d}$ 2 pav.).

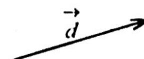
Užrašas $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ reiškia, kad vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vienakrypčiai.

– **priešpriešiniai** (vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{c}$ 2 pav.).

Užrašas $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$ reiškia , kad vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{c}$ priešpriešiniai.

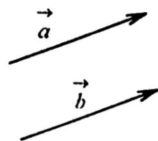


2 pav.

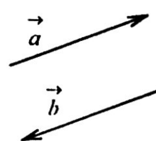


- **Lygiais** vektoriais vadinami vienakrypčiai kolinearieji vektoriai, kurių ilgiai lygūs.

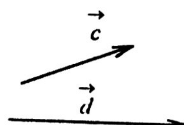
3 paveiksle vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygūs (žymima $\vec{a} = \vec{b}$), nes $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ir $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; 4 paveiksle pavaizduoti nelygūs vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{b}$), nes $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ (nors ir $|\vec{a}| = |\vec{b}|$). 5 paveiksle $\vec{c} \neq \vec{d}$, nes vektoriai $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ nėra kolinearieji.



3 pav.



4 pav.

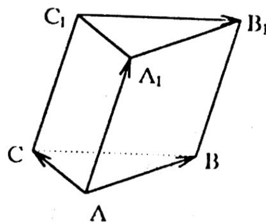


5 pav.

- Kai A - vektoriaus $\vec{a}$ pradžia, sakoma, kad vektorius $\vec{a}$ atidėtas nuo taško A. Iš vektorių lygumo apibrėžimo seka, kad **nuo kiekvieno taško galima atidėti turimam vektoriui lygų vektorių, tačiau tik vieną.**
- Sakoma , kad vektorius $\vec{AB}$ lygiagretus plokštumai, jeigu tiesė AB lygiagreti tai plokštumai.

> **Komplanariaisiais** vadinami nenuliniai vektoriai, kurie yra lygiagretūs vienai ir tai pačiai plokštumai arba yra vienoje plokštumoje.

Bet kurie du nenuliniai vektoriai visada komplanarūs. Bet kurie trys vektoriai gali būti ir komplanarūs, ir nekomplanarūs. 6 paveiksle pavaizduota trikampė prizmė $ABCA_1B_1C_1$. Vektoriai $\vec{AC}, \vec{AB}$ ir $\vec{C_1B_1}$ komplanarūs, o vektoriai $\vec{AC}, \vec{AB}$ ir $\vec{AA_1}$ nekomplanarūs.



6 pav.

Trijų vektorių komplanarumo požymis :

Jei vektorių $\vec{c}$ galima išreikšti vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, t.y.

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}, \quad (1)$$

(x ir y - kurie nors skaičiai), tai vektoriai $\vec{a}, \vec{b}$ ir $\vec{c}$ komplanarūs.

Teisingas ir atvirkščias teiginys : jei vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ komplanarūs, o vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs, tai vektorių $\vec{c}$ galima išreikšti vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ (t.y. (1) formule) ; išraiškos (1) koeficientai (t.y. skaičiai x ir y) nusakomi vienareikšmiškai.

Vektoriaus reiškimas trimis nekomplanariais vektoriais.

Kiekvieną vektorių $\vec{p}$ vienintelu būdu galima išreikšti trimis nekomplanariais vektoriais $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ t.y.

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c};$$

čia x, y ir z - tam tikri skaičiai , vadinami išraiškos koeficientais ; išraiškos koeficientai nusakomi vienareikšmiškai.

> - **Priešingaisiais vektoriais** vadinami du nenuliniai priešpriešiniai vektoriai , kurių ilgiai yra lygūs.

7 paveiksle pavaizduoti vektoriai $\vec{AB}$ ir $\vec{BA}$ yra priešingi. Vektoriui $\vec{a}$ priešingas vektorius žymimas $-\vec{a}$.



7 pav.

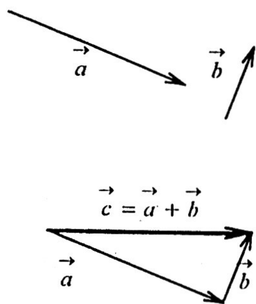
Turime $-\vec{a} = \vec{BA}$, $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$, $\vec{a} \uparrow\downarrow (-\vec{a})$.

Vektoriaus $\vec{a}$ ir jam priešingo vektoriaus $-\vec{a}$ suma yra nulinis vektorius.

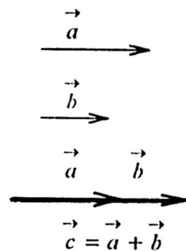
2. VEKTORIŲ SUDĖTIS IR ATIMTIS. VEKTORIAUS DAUGYBA IŠ SKAIČIAUS.

> **Dviejų vektorių** $\vec{a}$ **ir** $\vec{b}$ **suma** vadinamas toks vektorius $\vec{c}$, kurio pradžia sutampa su vektoriaus $\vec{a}$ pradžia, o pabaiga - su vektoriaus $\vec{b}$ pabaiga.

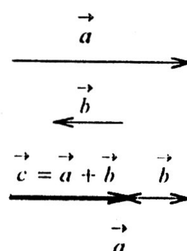
Dviejų vektorių sudėties trikampio taisyklė : norint rasti dviejų nenulinių vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sumą reikia nuo vektoriaus $\vec{a}$ pabaigos atidėti vektorių, lygų vektoriui $\vec{b}$. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ suma yra vektorius , kurio pradžia sutampa su vektoriaus $\vec{a}$ pradžia, o pabaiga - su vektoriaus $\vec{b}$ pabaiga (žr. 8 pav.). Pagal šią taisyklę galima sudėti ir kolinearius vektorius, nors juos sudėjus trikampis ir negaunamas (žr. 9, 10 pav.).



8 pav.

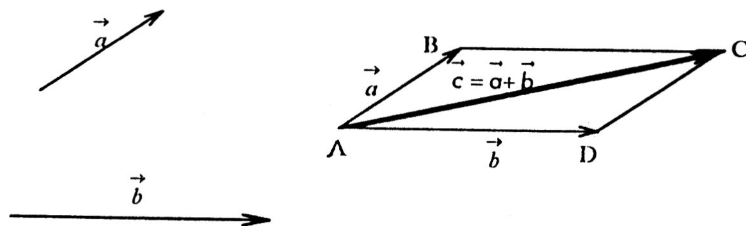


9 pav.



10 pav.

Du nekolineariuosius vektorius galima taip pat sudėti pagal **lygiagretainio taisyklę :** dviejų nekolinearių vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ suma yra vektorius, vaizduojamas lygiagretainio, kurio dvi gretimos kraštinės yra šie vektoriai, įstrižaine, einančia iš minėtų vektorių bendros pradžios (žr. 11 pav.)



11 pav.

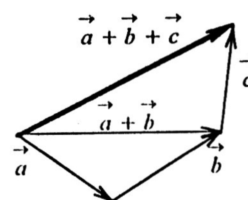
Vektorių sudėties dėsniai.

Bet kuriems vektoriams $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$, teisingos lygybės :

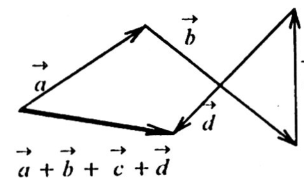
1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (perstatymo dėsnis) ;

2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (jungimo dėsnis).

Trijų vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ suma apibrėžiama kaip vektoriaus $\vec{a} + \vec{b}$ ir vektoriaus $\vec{c}$ suma (žr. 12 pav.) Analogiškai apibrėžiama bet kurio vektorių skaičiaus suma, pavyzdžiui $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \vec{d}$. 13 paveiksle parodyta, kaip randama vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ suma pagal **daugiakampio taisyklę.**

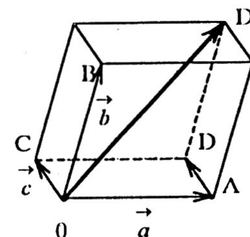


12 pav.



13 pav.

Jeigu trys vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ nekomplanarūs, tai jų sumą galima rasti pagal **gretasienio taisyklę :** vektorius $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vaizduojamas įstrižaine gretasienio, kurio matmenys (ilgis, plotis ir aukštis) yra minėti vektoriai, turintys bendrą pradžią (žr. 14 pav.). Iš tikrųjų :



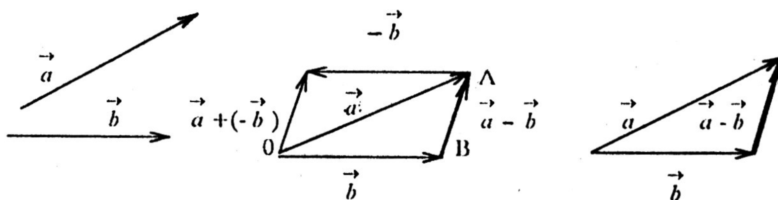
$\vec{OD_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

14 pav.

- **Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumu $\vec{a} - \vec{b}$** vadinama vektoriaus $\vec{a}$ ir vektoriui $\vec{b}$ priešingo vektoriaus $-\vec{b}$ suma , t.y. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Jeigu $\vec{OA} = \vec{a}$ ir $\vec{OB} = \vec{b}$ (žr. 15 a) pav.), tai vektorius $\vec{a} - \vec{b}$ yra kryptinė atkarpa $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$

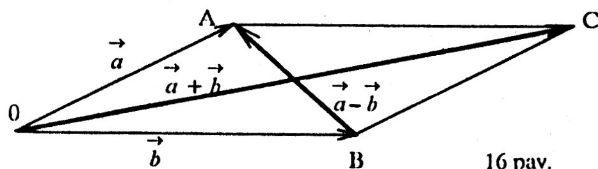
Vektorių atimties taisyklė: norint rasti vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumą, reikia nuo vektoriaus $\vec{a}$ pradžios atidėti vektorių, lygų vektoriui $\vec{b}$; vektorius, kurio pradžia yra vektoriaus $\vec{b}$ pabaiga, o pabaiga - vektoriaus $\vec{a}$ pabaiga ir yra vektorius $\vec{a} - \vec{b}$ (žr. 15 b) pav.).



15 pav. a) b)

Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumą galima rasti pagal **lygiagretainio taisyklę** (žr. 16 pav.).

$$\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b} \ , \quad \vec{BA} = \vec{a} - \vec{b} \ .$$

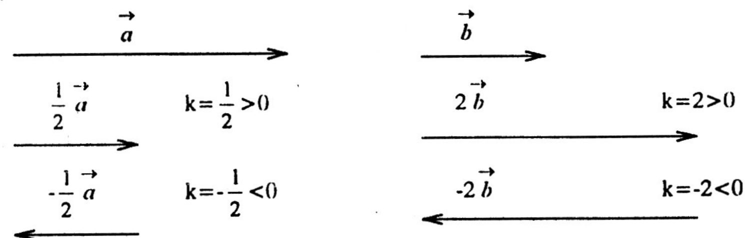


16 pav.

- **Nenulinio vektoriaus $\vec{a}$ ir skaičiaus $k \neq 0$ sandauga** vadinamas vektorius $k\vec{a} = \vec{b}$, kurio ilgis lygus $|k| \, |\vec{a}|$; vektoriai $\vec{a}$ ir $k\vec{a}$ vienakrypčiai, kai $k>0$, priešpriešiniai, kai $k<0$.

Nulinio vektoriaus ir bet kurio skaičiaus sandauga laikomas nulinis vektorius.

Nenulinio vektoriaus daugybą iš skaičiaus iliustruoja 17 paveikslas.



a) 17pav. b)

Kad ir kokie būtų skaičius k ir vektorius $\vec{a}$, **vektoriai $\vec{a}$ ir $k\vec{a}$ kolinearūs.**
$(-1)\vec{a}$ yra vektoriui $\vec{a}$ priešingas vektorius, t.y.

$$(-1)\vec{a} = -\vec{a}$$

Pagrindinės vektoriaus ir skaičiaus daugybos savybės :

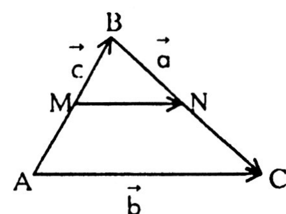
1. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (jungimo dėsnis);
2. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (pirmasis skirstymo dėsnis);
3. $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (antrasis skirstymo dėsnis).

Visose lygybėse k,l - skaičiai, o $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ - vektoriai.

Išspręsime keletą uždavinių.

1. uždavinys. Įrodysime, kad trikampio vidurinė linija lygiagreti jo trečiajai kraštinei ir lygi šios kraštinės pusei.

Sprendimas.



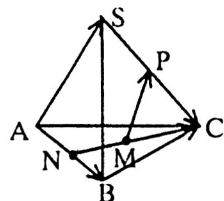
Nagrinėsime trikampį ABC. Sakykime, $\vec{AB}=\vec{c}$, $\vec{BC}=\vec{a}$, $\vec{AC}=\vec{b}$. Tada pagal vektorių sudėties trikampio taisyklę $\vec{c}+\vec{a}=\vec{b}$ (žr. brėžinį). Jeigu M ir N - trikampio ABC kraštinių AB ir BC vidurio taškai, tai

$$\vec{MN}=\vec{MB}+\vec{BN}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})=\frac{1}{2}\vec{b}.$$

Kadangi $\vec{AC}=\vec{b}$ ir $\vec{MN}=\frac{1}{2}\vec{b}$, tai $\vec{MN}=\frac{1}{2}\vec{AC}$. Vadinasi, vektoriai $\vec{MN}$ ir $\vec{AC}$ vienakrypčiai, o tai reiškia, kad AC || MN. Kadangi $\vec{MN}=\frac{1}{2}\vec{AC}$, tai $MN=\frac{1}{2}AC$, nes lygių vektorių ilgiai (moduliai) lygūs.

2 uždavinys. Piramidės SABC visos sienos - taisyklingieji trikampiai; taškas M - trikampio ABC centras, o taškas P dalija briauną SC pusiau (žr. brėžinį). Vektorių $\vec{MP}$ išreiškite vektoriais $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ir $\vec{AS}$.

Sprendimas.



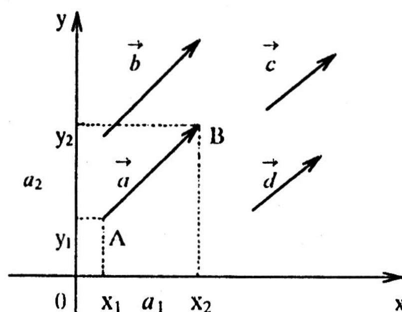
$\vec{MP}=\vec{MC}-\vec{PC}$. Šioje lygybėje $\vec{PC}=\frac{1}{2}\vec{SC}=\frac{1}{2}(\vec{AC}-\vec{AS})$. Vadinasi $\vec{MP}=\vec{MC}-\frac{1}{2}(\vec{AC}-\vec{AS})$. Rasime $\vec{MC}$. Kadangi atkarpa CN yra trikampio ABC pusiaukraštinė, išvesta iš viršūnės C, tai $MC=\frac{2}{3}CN$. Todėl $\vec{MC}=\frac{2}{3}\vec{NC}$. Kadangi

$\vec{NC}=\vec{AC}-\vec{AN}=\vec{AC}-\frac{1}{2}\vec{AB}$, tai $\vec{MC}=\frac{2}{3}\left(\vec{AC}-\frac{1}{2}\vec{AB}\right)=\frac{2}{3}\vec{AC}-\frac{1}{3}\vec{AB}$. Taigi.

$$\vec{MP}=\frac{2}{3}\vec{AC}-\frac{1}{3}\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{AC}+\frac{1}{2}\vec{AS}=\frac{1}{6}\vec{AC}-\frac{1}{3}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AS}.$$

3. VEKTORIAUS KOORDINATĖS

- **Vektoriaus koordinatės plokštumoje . Vektoriaus skaidymas koordinatiniais vektoriais plokštumoje.**



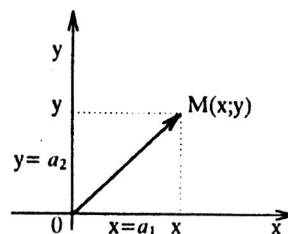
18 pav.

Jei plokštumoje duota stačiakampė koordinačių sistema Oxy, tai **vektoriaus $\vec{a}$, kurio pradžia yra taškas $A(x_1;y_1)$, o pabaiga taškas $B(x_2;y_2)$ koordinatės yra skaičiai** $a_1 = x_2 - x_1$ ir $a_2 = y_2 - y_1$ (žr. 18 pav.)

Jei vektorius $\vec{a}$ turi koordinates a_1 ir a_2, tai žymime $\vec{a}\ \{a_1;\ a_2\}$. Lygūs vektoriai turi lygias atitinkamas koordinates ir atvirkščiai, jei vektorių atitinkamos koordinatės lygios, tai tie vektoriai lygūs, t.y. lygybė $\vec{a}\ \{a_1;\ a_2\} = \vec{b}\ \{b_1;\ b_2\}$ reiškia, kad $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.

Pavyzdys. Duotas taškas A(-1; 1) ir vektorius $\vec{a}$ {3;2}. Rasime koordinates tokio taško B, kad $\vec{AB} = \vec{a}$.

Sprendimas. Tegul (x;y) - taško B koordinatės. Tada $\vec{AB}$ {x+1; y-1} ir jeigu $\vec{a} = \vec{AB}$, tai x + 1 = 3 ir y - 1 = 2. Vadinasi, x=2, y=3. Taigi taško B koordinatės yra (2;3).



19 pav.

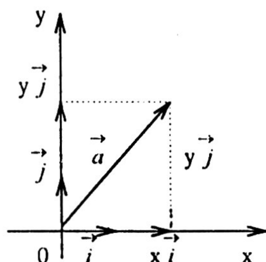
Vektorius $\vec{OM}$, kurio pabaiga yra tam tikras taškas M(x ; y), o pradžia sutampa su koordinačių pradžia, vadinamas to taško **vietos vektoriumi** (žr. 19 pav.).

Įrodoma, kad taško M(x ; y) vietos vektoriaus $\vec{OM}$ koordinatės lygios jo pabaigos taško M koordinatėms : $\vec{OM}$ {x,y}.

Kiekvienam plokštumos vektoriui $\vec{a}$ egzistuoja be galo daug jam lygių vektorių, turinčių tas pačias atitinkamas koordinates kaip ir vektorius $\vec{a}$.
Pavyzdžiui, 18 paveiksle pavaizduoti vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ yra vienakrypčiai, be to jų moduliai lygūs $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}|$, todėl $\vec{a} = \vec{b} = \vec{c} = \vec{d}$ ir turi tas pačias koordinates a_1 ir a_2; tačiau visiems šiems vektoriams egzistuoja vienintelis jiems lygus vektorius $\vec{OM}$, kurio pradžia yra koordinačių pradžios taškas O, o pabaiga - taškas M, kurio koordinatės yra $x = a_1$, $y = a_2$ (žr. 19 pav.).
Vadinasi, bet kurį plokštumos vektorių $\vec{a}\{a_1; a_2\}$, kurio pradžia nėra koordinačių pradžios taškas O, galima pakeisti **jam lygiu vektoriumi** $\vec{OM}$, kurio pradžia yra koordinačių pradžios taškas O, o pabaiga - taškas M, kurio koordinatės yra $x = a_1$, $y = a_2$.

Pasirinkime plokštumoje stačiakampę koordinačių sistemą Oxy . Kiekviename teigiamajame pusašyje nuo koordinačių pradžios atidėkime vienetinį vektorių - vektorių, kurio ilgis lygus vienetui. Jei abscisių ašies (Ox) vienetinį vektorių pažymėsime $\vec{i}\{1;0\}$, o ordinačių ašies (Oy) - $\vec{j}\{0;1\}$ (vektorius $\vec{i}\{1;0\}$ ir $\vec{j}\{0;1\}$ vadiname **koordinatiniais vektoriais**), tai bet kurį plokštumos vektorių $\vec{a}\{x; y\}$ galėsime išreikšti koordinatiniais vektoriais : (žr. 20 pav.).

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

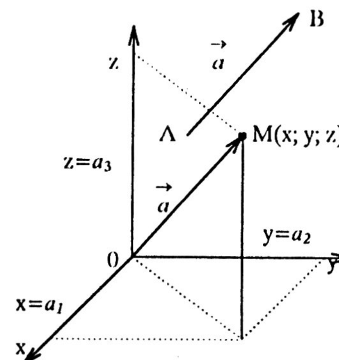


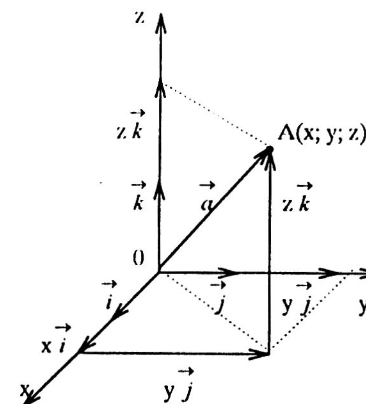
20 pav.

- **Vektoriaus koordinatės erdvėje. Vektoriaus skaidymas koordinatiniais vektoriais erdvėje.** Pasirinkime erdvėje stačiakampę koordinačių sistemą Oxyz . Jei erdvės vektoriaus $\vec{a}$ pradžia yra taškas $A(x_1; y_1; z_1)$, o pabaiga - taškas $B(x_2; y_2; z_2)$, tai trys skaičiai $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ ir $a_3 = z_2 - z_1$ vadinami

vektoriaus $\vec{AB} = \vec{a}$ koordinatėmis turimoje koordinačių sistemoje ; žymima $\vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}$. Lygūs vektoriai turi lygias atitinkamas koordinates ir atvirkščiai, jeigu vektorių atitinkamos koordinatės lygios, tai vektoriai lygūs, t.y. jei $a\{a_1; a_2; a_3\} = b\{b_1; b_2; b_3\}$, tai $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

Bet kuriam erdvės vektoriui $\vec{AB} = \vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}$ egzistuoja toks jam lygus vektorius $\vec{OM}$ (taško M vietos vektorius), kurio pradžia yra koordinačių pradžios taškas O, o pabaiga - taškas, kurio koordinatės yra $x=a_1$, $y=a_2$, $z=a_3$, t.y. vektoriaus $\vec{OM}$ koordinatės lygios jo pabaigos taško koordinatėms (žr. 21 pav. a)) : $\vec{OM}\{x; y; z\}$.





a) 21 pav. b)

Kiekvieną vektorių $\vec{a}$ vienintelių būdu galima išreikšti pavidalu :

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

išraiškos koeficientai x, y, z vadinami vektoriaus $\vec{a}$ koordinatėmis turimoje koordinačių sistemoje ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - koordinatiniai vektoriai : $\vec{i}\{1; 0; 0\}$- abscisių ašies (Ox) vienetinis vektorius ($|\vec{i}|=1$), $\vec{j}\{0; 1; 0\}$ – ordinačių ašies (Oy) vienetinis vektorius ($|\vec{j}|=1$), $\vec{k}\{0; 0; 1\}$ –aplikačių ašies (Oz) vienetinis vektorius ($|\vec{k}|=1$), (žr. 21 pav. b)).

Vektorių sumos, skirtumo, vektoriaus ir skaičiaus sandaugos koordinatės. Žinant vektorių koordinates, galima rasti vektorių sumos, skirtumo, vektoriaus ir skaičiaus sandaugos koordinates.

1. Jei $\vec{a}\ \{x_1 ; y_1 ; z_1\}$ ir $\vec{b}\ \{x_2 ; y_2 ; z_2\}$ - turimi vektoriai , tai vektoriaus $\vec{a}+\vec{b}$ koordinatės yra $\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\}$, t.y. kiekviena dviejų ar daugiau vektorių sumos koordinatė lygi tų vektorių atitinkamų koordinačių sumai.
2. Jei $\vec{a}\ \{x_1 ; y_1 ; z_1\}$ ir $\vec{b}\ \{x_2 ; y_2 ; z_2\}$ - turimi vektoriai , tai vektoriaus $\vec{a}-\vec{b}$ koordinatės yra $\{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2\}$, t.y. kiekviena dviejų vektorių skirtumo koordinatė lygi tų vektorių atitinkamų koordinačių skirtumui.
3. Jei $\vec{a}\ \{x, y, z\}$ - turimas vektorius, k - turimas skaičius, tai vektoriaus $k\vec{a}$ koordinatės yra $\{kx ; ky; kz\}$, t.y. vektoriaus ir skaičiaus sandaugos kiekviena koordinatė lygi vektoriaus atitinkamos koordinatės ir to skaičiaus sandaugai.

- **Vektoriaus ilgio reiškimas vektoriaus koordinatėmis .** Vektoriaus $\vec{a}\ \{x; y; z\}$ ilgį galima apskaičiuoti taikant formulę

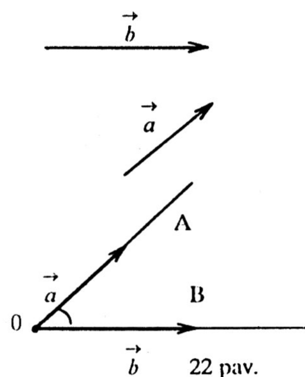
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Pavyzdžiui,

jei $\vec{a}\ \{6; -3; -2\}$, tai vektoriaus $\vec{a}$ ilgis $|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = 7$.

4. VEKTORIŲ SKALIARINĖ SANDAUGA.

- **Kampas tarp vektorių ..**



22 pav.

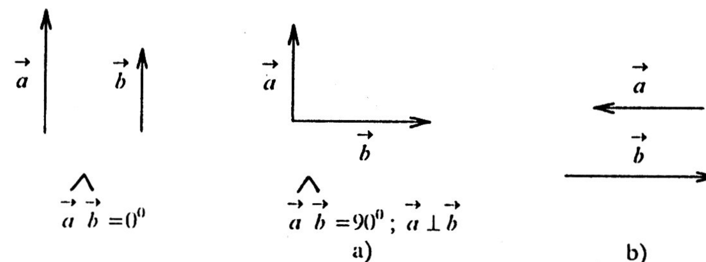
Kampas tarp vektorių $\vec{OA} = \vec{a}$ ir $\vec{OB} = \vec{b}$ tai kampas tarp spindulių OA ir OB (žr.22 pav.), t.y. kampas AOB.

Kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ žymimas šitaip : $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$.

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^\circ$, kai **vektoriai** $\vec{a}$ **ir** $\vec{b}$ **vienakrypčiai** (atskiru atveju arba vienas iš jų arba abu nuliniai) (žr. 23 pav.)

Jei $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^\circ$, tai **vektoriai** $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ **statmeni.** (žr.24a)pav.) ; žymima $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180^\circ$, tai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ **priešpriešiniai.** (žr. 24 pav. b)).



23 pav. 24 pav.

- Dviejų vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ **skaliarine sandauga** (žymima $\vec{a}\,\vec{b}$) vadinama jų ilgių ir kampo tarp vektorių kosinuso sandauga:

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

Vektoriaus skaliarinis kvadratas (t.y. vektoriaus ir jo paties skaliarinė sandauga) lygus jo ilgio kvadratui , t.y.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

Dviejų vektorių skaliarinę sandaugą galima apskaičiuoti žinant tų vektorių koordinates : vektorių $\vec{a}\ \{x_1 ; y_1; z_1\}$ ir $\vec{b}\ \{x_2 ; y_2 ; z_2\}$ skaliarinė sandauga išreiškiama formule

$$\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Pavyzdžiui, jei duoti vektoriai $\vec{a}\ \{1; -1; 4\}$ ir $\vec{b}\ \{5; 6; 2\}$, tai jų skaliarinė sandauga lygi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 5 - 6 + 8 = 7$.

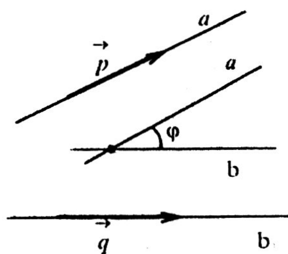
Kampo α tarp nenulinių vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kosinusas. Kampo α tarp nenulinių vektorių $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ ir $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ kosinusui apskaičiuoti taikoma formulė.

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$, nes

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

- **Kampo tarp dviejų tiesių (susikertančių arba prasilenkiančių), radimas kai žinomos tų tiesių krypties vektorių koordinatės.**

Jeigu $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ ir $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$ - tiesių a ir b krypties vektoriai (žr. 25 pav.), φ - kampas tarp tiesių a ir b, tai



25 pav.

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

- **Kosinusų kampų, kuriuos sudaro vektorius $\vec{a}$ su koordinatiniais vektoriais $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ apskaičiavimas.**

Kosinuso kampo, kurį sudaro vektorius $\vec{a}\{x; y; z\}$ su abscisių ašies Ox vienetiniu vektoriumi $\vec{i}$ apskaičiuojamas taikant formulę

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Kosinuso kampo, kurį sudaro vektorius $\vec{a}\{x; y; z\}$ su ordinačių ašies Oy vienetiniu vektoriumi $\vec{j}$ apskaičiuojamas taikant formulę

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Kosinuso kampo, kurį sudaro vektorius $\vec{a}\{x; y; z\}$ su aplikačių ašies Oz vienetiniu vektoriumi $\vec{k}$ apskaičiuojamas taikant formulę

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{k}}) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Teisinga lygybė $$\cos^2(\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a}\,\vec{k}}) = 1$$

5. VEKTORIŲ KOLINEARUMO SĄLYGA.

- Kad du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ būtų kolinearūs, būtina ir pakanka, kad egzistuotų toks skaičius k, kad

$$\vec{b} = k\vec{a}$$

- Jeigu vektoriai $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ ir $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ yra kolinearūs, tai jų atitinkamos koordinatės yra proporcingos, t.y. $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = k$, $k \in R$.

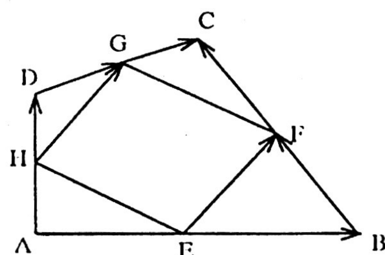
6. VEKTORIŲ STATMENUMO SĄLYGA.

Jei $\vec{a} \perp \vec{b}$, tai $\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$; čia $\vec{a}\,\vec{b}$ - vektorių $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ ir $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ skaliarinė sandauga. Jei $\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$, tai $\vec{a} \perp \vec{b}$, kur $\vec{a}\,\vec{b}$ - vektorių $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ ir $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ skaliarinė sandauga.

Išspręsime keletą skyriaus "Vektoriai" uždavinių.

1 uždavinys. Įrodykite, kad bet kurio keturkampio ABCD kraštinių vidurio taškai yra lygiagretainio viršūnės.

Įrodymas.



26 pav.

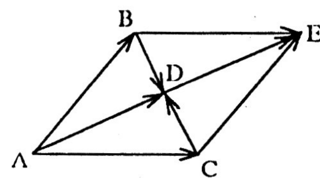
Sakykime, taškai E, F, G, H - keturkampio kraštinių AB, BC, CD ir DA vidurio taškai (žr. 26 pav.).

Pagal lygiagretainio požymį, jeigu keturkampio priešingos kraštinės poromis lygiagrečios ir lygios, tai tas keturkampis yra lygiagretainis. Vadinasi, pakanka įrodyti, kad atkarpos EF ir HG vienodo ilgio ir lygiagrečios. "Vektorių kalba" tai reiškia, kad reikia įrodyti, jog vektoriai $\vec{EF}$ ir $\vec{HG}$ lygūs.

Turime : $\vec{EF} = \vec{EB} + \vec{BF} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \vec{BC}\right)$, o $\vec{HG} = \vec{HD} + \vec{DG} = \frac{1}{2}\left(\vec{AD} + \vec{DC}\right)$. Bet $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC}$. Todėl $\vec{EF} = \vec{HG}$.

2 uždavinys. Sakykime, AD - trikampio ABC pusiaukraštinė, išvesta iš viršūnės A į kraštinę BC. Išreikškite vektorių $\vec{AD}$ vektoriais $\vec{AB}$ ir $\vec{AC}$.

Sprendimas.



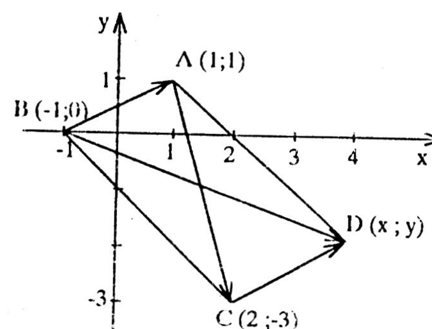
27 pav.

1 būdas. Trikampį ABC papildome iki lygiagretainio ABEC (žr. 27 pav.). Tuomet, remdamiesi lygiagretainio taisykle, $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AE}$. Kadangi $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AE}$, tai $\vec{AD} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \vec{AC}\right)$.

2 būdas. Remiantis trikampio taisykle, $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}$ ir $\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}$. Kadangi D - atkarpos BC vidurys, tai $\vec{CD} = -\vec{BD}$. Vadinasi , $2\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{AC}$, t.y. $\vec{AD} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \vec{AC}\right)$.

3 uždavinys. Taškai A (1 ; 1) , B (-1 ; 0) , C (2 ; 3) yra lygiagretainio viršūnės. Rasti ketvirtojo taško D koordinates, lygiagretainio įstrižainių ilgius ir kampą tarp įstrižainių (žr. 28 pav.).

Sprendimas.



28 pav.

Sakykime, taško D koordinatės yra x ir y : D (x ; y). Rasime vektorių $\vec{BA}$ ir $\vec{AC}$ bei taško D koordinates.

Turime : $\vec{BA}\{1-(-1);1-0\} = \vec{BA}\{2;1\}$,

$\vec{AC}\{2-1;-3-1\} = \vec{AC}\{1;-4\}$,

$\vec{CD}\{x-2;y-(-3)\} = \vec{CD}\{x-2;y+3\}$.

Kadangi vektoriai $\vec{BA}$ ir $\vec{CD}$ lygūs (priešingos lygiagretainio kraštinės lygios ir lygiagrečios), tai jie turi lygias atitinkamas koordinates, t.y. 2=x-2 , 1=y+3 . Iš čia **x=4 , y=-2** . Taigi D{4;-2}. Rasime vektoriaus $\vec{BD}$ koordinates. Turime : $\vec{BD} = \{4-(-1);-2-0\} = \vec{BD}\{5;-2\}$. Lygiagretainio įstrižainės AC ilgis lygus vektoriaus $\vec{AC}$ ilgiui, o įstrižainės BD ilgis lygus vektoriaus $\vec{BD}$ ilgiui.

Vadinasi,

$$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} ,$$

$$\left|\vec{BD}\right| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} .$$

Kampas tarp įstrižainių AC ir BD lygus kampui tarp vektorių $\vec{AC}$ ir $\vec{BD}$. Turime :

$$\cos\left(\vec{BD}\,\vec{AC}\right)=\frac{\vec{BD}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{BD}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|}\quad (1).$$

Rasime vektorių $\vec{BD}$ ir $\vec{AC}$ skaliarinę sandaugą :

$$\vec{BD}\cdot\vec{AC}=1\cdot 5+(-4)\cdot(-2)=5+8=13\quad (2).$$

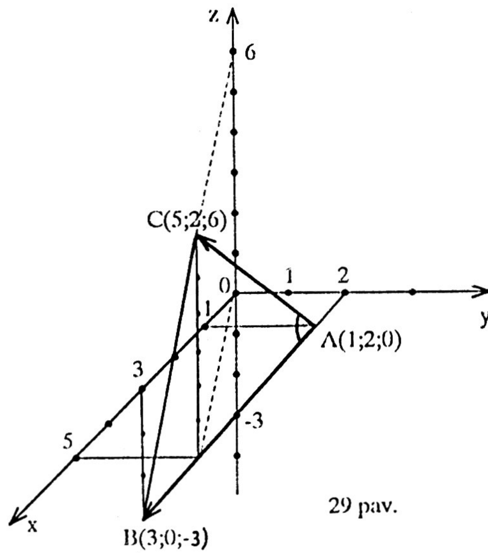
Surašę anksčiau gautas $\left|\vec{AC}\right|$ ir $\left|\vec{BD}\right|$ išraiškas bei (2) išraišką į (1) lygybę, gauname

$\cos\left(\vec{BD}\,\vec{AC}\right)=\frac{13}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{17}}=\frac{13}{\sqrt{493}}$. Iš čia $\vec{BD}\cdot\vec{AC}=\arccos\frac{13}{\sqrt{493}}$.

Atsakymas. D{4;-2} , $AC=\sqrt{17}$, $BD=\sqrt{29}$, $\arccos\frac{13}{\sqrt{493}}$.

4 uždavinys. Duoti trys taškai A(1 ; 2 ; 0) , B(3 ; 0 ; -3) , C(5 ; 2 ; 6). Apskaičiuoti trikampio ABC plotą (29 pav.).

Sprendimas.



29 pav.

Trikampio kraštinės yra AB, BC ir AC.

Pažymėkime vektorius $\vec{AB}$ ir $\vec{AC}$ (žr. 29 pav.).

Trikampio ABC plotas

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle A.$$

Kadangi

$\sin\angle A=\sqrt{1-\cos^2\angle A}$, tai

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sqrt{1-\cos^2\angle A}\quad (1)$$

Vektorių $\vec{AB}$ ir $\vec{AC}$ skaliarinė sandauga lygi $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|\cos\left(\vec{AB}\,\vec{AC}\right)$

Iš čia $\cos\left(\vec{AB}\,\vec{AC}\right)=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|}$

Kadangi $\cos\left(\vec{AB}\,\vec{AC}\right)=\cos\angle A$, tai $\cos\angle A=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|}$ (2)

Įrašę (2) išraišką į (1) turime :

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sqrt{1-\frac{\left(\vec{AB}\cdot\vec{AC}\right)^2}{\left|\vec{AB}\right|^2\cdot\left|\vec{AC}\right|^2}}$. Bet $AB=\left|\vec{AB}\right|$, $AC=\left|\vec{AC}\right|$

todėl $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{AB}\right|^2\cdot\left|\vec{AC}\right|^2-\left(\vec{AB}\cdot\vec{AC}\right)^2}$ (3)

Vadinasi, norint rasti trikampio ABC plotą, pakanka surasti vektorių $\vec{AB}$ ir $\vec{AC}$ ilgius bei tų vektorių skaliarinę sandaugą. Rasime vektorių $\vec{AB}$ ir $\vec{AC}$ koordinates :

$\vec{AB}$ { 3 - 1 ; 0 - 2 ; -3 - 0 } = $\vec{AB}$ { 2 ; -2 ; -3 }

$\vec{AC}$ { 5 - 1 ; 2 - 2 ; 6 - 0 } = $\vec{AC}$ { 4 ; 0 ; 6 }

Tada vektorių $\vec{AB}$ ir $\vec{AC}$ ilgiai yra

$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{17}$, $\vec{AC}=\sqrt{4^2+0^2+6^2}=\sqrt{52}$.

Vektorių $\vec{AB}$ ir $\vec{AC}$ skaliarinė sandauga lygi $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=2\cdot 4+(-2)\cdot 0+(-3)\cdot 6=8+0-18=-10$.

Surašę gautąsias $\left|\vec{AB}\right|$, $\left|\vec{AC}\right|$ bei $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ reikšmes į (3) formulę, gauname

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{17}\right)^2+\left(\sqrt{52}\right)^2-(-10)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{17+52-100}=\frac{1}{2}\sqrt{784}=14$ ploto vienetų.

Atsakymas. 14 pl. vnt.

5 uždavinys. Raskite tokius skaičius m ir n , su kuriais vektoriai $\vec{a}$ { 4 ; m ; n } ir $\vec{b}$ { n ; 2 ; m^2 } būtų kolinearūs.

Sprendimas. Sakykime, kad vektoriai $\vec{a}\{4;m;n\}$ ir $\vec{b}\{n;2;m^2\}$ kolinearūs. Tada jų atitinkamos koordinatės yra proporcingos, t.y. galioja lygybė $\frac{4}{n}=\frac{m}{2}=\frac{n}{m^2}$. Remdamiesi šia lygybe, sudarykime lygčių sistemą

$$\frac{4}{n}=\frac{m}{2} \quad , \quad \frac{m}{2}=\frac{n}{m^2}.$$

Iš pirmosios sistemos lygties $m=\frac{8}{n}$. Šią m reikšmę įrašykime į antrąją sistemos lygtį. Gauname lygtį $\frac{\frac{8}{n}}{2}=\frac{n}{\left(\frac{8}{n}\right)^2}$, arba $n^4=256$. Iš čia arba $n=4$, arba $n=-4$. Tada, remiantis lygybe $\frac{4}{n}=\frac{m}{2}$, randame m: $\frac{4}{4}=\frac{m}{2}$, t.y. $m=2$ arba $\frac{4}{-4}=\frac{m}{2}$, t.y. $m=-2$. Vadinasi, vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kolinearūs, kai $n=4$, $m=2$ arba $n=-4$, $m=-2$.

Atsakymas. $n=4$, $m=2$ arba $n=-4$, $m=-2$.

6 uždavinys. Įrodykite, kad trikampis, kurio viršūnės $A(6;-4;2)$, $B(3;2;3)$, $C(3;-5;-1)$, yra statusis.

Įrodymas. Trikampio kraštinės yra AB, BC ir AC. Nagrinėsime vektorius $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ ir $\vec{AC}$. Randame šių vektorių koordinates: $\vec{AB}\{3-6;2-(-4);3-2\}=\vec{AB}\{-3;6;1\}$,

$$\vec{BC}\{3-3;-5-2;-1-3\}=\vec{BC}\{0;-7;-4\},$$

$$\vec{AC}\{3-6;-5-(-4);-1-2\}=\vec{AC}\{-3;-1;-3\}.$$

Apskaičiuosime šių vektorių skaliarines sandaugas:

$$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=-3\cdot0+6\cdot(-7)+1\cdot(-4)=-42-4=-46,$$

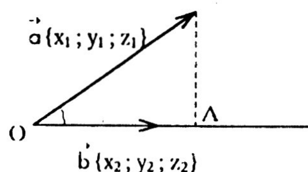
$$\vec{BC}\cdot\vec{AC}=0\cdot(-3)+(-7)\cdot(-1)+(-4)\cdot(-3)=7+12=19,$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=(-3)\cdot(-3)+6\cdot(-1)+1\cdot(-3)=9-6-3=0.$$

Taigi $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0$, o tai reiškia, kad $\vec{AB}\perp\vec{AC}$. Vadinasi, trikampio kraštinės $\vec{AB}$ ir $\vec{AC}$ yra statmenos viena kitai. Todėl trikampis ABC status, o kraštinės AB ir AC yra jo statiniai.

7 uždavinys. raskite vektoriaus $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ projekcijos į spindulį, kurio pradžia sutampa su vektoriaus $\vec{a}$ pradžia, o kryptis sutampa su vektoriaus $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ kryptimi, ilgį.

Sprendimas.



30 pav.

Ieškomosios vektoriaus $\vec{a}$ projekcijos ilgis lygus atkarpos OA ilgiui (žr. 30 pav.). Turime:

$$OA=pr_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\left|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)\right|=|\vec{a}|\cdot\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=$$

$$=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

8 uždavinys. Raskite vektorių $\vec{x}$, esantį vektorių $\vec{a}\{3,1,-1\}$ ir $\vec{b}\{2,-3,1\}$ plokštumoje, statmeną vektoriui $\vec{b}$ ir tenkinantį sąlygą $\vec{a}\cdot\vec{x}=75$

Sprendimas. Sakykime, vektorius $\vec{x}$ yra vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ plokštumoje. Vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{x}$ yra komplanarūs, nes jie yra vienoje plokštumoje. Todėl remiantis vektorių komplanarumo požymiu, turime $\vec{x}=k\vec{a}+m\vec{b}$ (k, m $\in$ R). Kadangi pagal sąlygą $\vec{x}\cdot\vec{b}=0$ (nes $\vec{x}\perp\vec{b}$), $\vec{x}\cdot\vec{a}=75$, tai $k(\vec{a}\cdot\vec{b})+m(\vec{b}\cdot\vec{b})=0$, $k(\vec{a}\cdot\vec{a})+m(\vec{b}\cdot\vec{a})=75$. Randame vektorių skaliarines sandaugas: $\vec{a}\cdot\vec{a}=3\cdot3+1\cdot1+(-1)\cdot(-1)=9+1+1=11$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot2+1\cdot(-3)+(-1)\cdot1=6-3-1=2$, $\vec{b}\cdot\vec{b}=2\cdot2+(-3)\cdot(-3)+1\cdot1=4+9+1=14$. Todėl

$$\begin{cases}2k+14m=0,\\11k+2m=75.\end{cases}$$

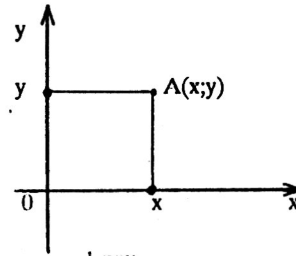
Išsprendę šią lygčių sistemą, randame $k=7$, $m=-1$. Vadinasi, $\vec{x}=7\vec{a}-\vec{b}$. Todėl vektoriaus $\vec{x}$ koordinatės yra $\{7\cdot3-2;7\cdot1-(-3);7\cdot(-1)-1\}$, t.y. $\{19;10;-8\}$.

Atsakymas. $\vec{x}\{19;10;-8\}$.

KOORDINAČIŲ METODAS PLOKŠTUMOJE IR ERDVĖJE

1.STAČIAKAMPĖ KOORDINAČIŲ SISTEMA PLOKŠTUMOJE IR ERDVĖJE. TAŠKO KOORDINATĖS.

- Kai per plokštumos tašką išvestos dvi viena kitai statmenos tiesės, kiekvienoje jų pasirinkta kryptis (ji žymima rodykle) ir pasirinktas atkarpų matavimo vienetas, sakoma, kad plokštumoje turime **stačiakampę koordinačių sistemą**. Tiesės Ox ir Oy, kuriose pasirinktos kryptys, vadinamos **koordinačių ašimis**; Ox - **abscisių ašis**, Oy - **ordinačių ašis**.

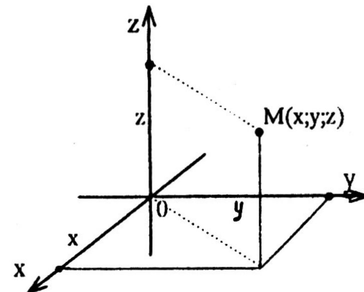


1 pav.

Taškas O - koordinačių ašių bendras taškas vadinamas **koordinačių pradžia**. Koordinačių sistema plokštumoje žymima Oxy. Plokštuma, einanti per koordinačių ašis Ox ir Oy vadinama **koordinačių plokštuma**.

Taškas O kiekvieną koordinačių ašį dalija į dū spindulius. Spindulys, kurio kryptis sutampa su ašies kryptimi, vadinamas **teigiamuoju pusašiu**, jo papildomasis spindulys - **neigiamuoju pusašiu**. Stašiakampėje koordinačių sistemoje kiekvieną plokštumos tašką A atitinka du skaičiai x ir y. Jie vadinami to **taško koordinatėmis** (koordinatė x vadinama abscise, o koordinatė y vadinama ordinate); žymima $A(x; y)$ (žr. 1 pav.).

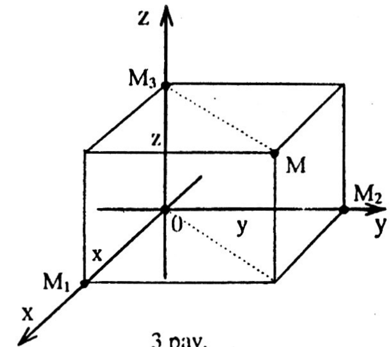
- Kai per erdvės tašką išvestos trys viena kitai statmenos tiesės, kiekvienoje jų pasirinkta kryptis (ji žymima rodykle) ir pasirinktas atkarpų matavimo vienetas, sakoma, kad erdvėje turime **stačiakampę koordinačių sistemą.** Ox, Oy, Oz - **koordinačių ašys**; Ox - **abscisių ašis**, Oy - **ordinačių ašis**, Oz - **aplikačių ašis** (žr. 2 pav.). Trys plokštumos, einančios per koordinačių ašis Ox ir Oy, Oy ir Oz, Ox ir Oz, vadinamos koordinačių plokštumo-mis ir žymimos Oxy, Oyz, Oxz.



2 pav.

Stačiakampėje koordinačių sistemoje kiekvieną erdvės tašką M atitinka trys skaičiai, kurie vadinami to **taško koordinatėmis**.

Taško M koordinačių apibrėžimas. Per tašką M išvedame tris koordinačių ašims statmenas plokštumas, tų plokštumų ir abscisių, ordinačių bei aplikačių ašių susikirtimo taškus pažymime M_1, M_2, M_3 (3 pav.). Tada taško M pirmoji koordinatė (ji vadinama **abscise** ir žymima raide x) apibrėžiama šitaip: $x = OM_1$, kai M_1 - teigiamojo pusašio taškas;



3 pav.

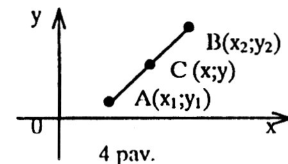
$x = -OM_1$, kai M_1 - neigiamojo pusašio taškas; $x = 0$, kai taškas M_1 sutampa su tašku O. Panašiai apibrėžiamos ir likusios dvi taško M koordinatės (antroji vadinama taško M ordinate ir žymima raide y, o trečioji vadinama taško M aplikate ir žymima z): $y = OM_2$, $z = OM_3$ - kai taškai M_2 ir M_3 yra teigiamojo pusašio taškai; $y = -OM_2$, $z = -OM_3$ - kai taškai M_2 ir M_3 yra neigiamojo pusašio taškai; $y = 0$, $z = 0$, kai M_2 sutampa su tašku O ir M_3 sutampa su tašku O.

Taško M koordinatės užrašomos taip: $M(x; y; z;)$ (žr. 2 ir 3 paveikslus).

2. ATKARPOS VIDURIO TAŠKO KOORDINATĖS. ATSTUMAS TARP DVIEJŲ TAŠKŲ

- **Atkarpos vidurio taško koordinatės. Atstumas tarp dviejų taškų:**

a) plokštumoje. Jei koordinačių sistemoje Oxy taško A koordinatės yra $(x_1 ; y_1)$, taško B koordinatės - $(x_2; y_2)$, tai atkarpos AB (žr. 4 pav.) vidurio taško C koordinates $(x; y)$ randame remdamiesi lygybėmis:



4 pav.

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

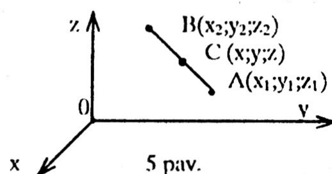
t.y. **kiekviena atkarpos vidurio taško koordinatė lygi pusei jos galų atitinkamų koordinačių sumos.**

Atstumas tarp taškų $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$ išreiškiamas formule

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

b) erdvėje.

Jei koordinačių sistemoje $Oxyz$ taško A koordinatės yra $(x_1; y_1; z_1)$, taško B koordinatės - $(x_2; y_2; z_2)$, tai atkarpos AB (žr. 5 pav.) vidurio taško C koordinates $(x; y; z)$ randame remdamiesi lygybėmis:



5 pav.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

t.y. **kiekviena atkarpos vidurio taško koordinatė lygi pusei jos galų atitinkamų koordinačių sumos.**

Atstumas tarp taškų $A(x_1; y_1; z_1)$ ir $B(x_2; y_2; z_2)$ išreiškiamas formule

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

3. TIESĖS LYGTIS

- Bendroji tiesės lygtis yra $ax + by + c = 0.$

Tiesės padėtis koordinačių ašių atžvilgiu.

1) $a = 0$, $b \neq 0$. Tiesės lygtis šiuo atveju yra $y = -\frac{c}{b}$, t.y. tiesė lygiagreti x ašiai. Jei $a = 0$ ir $c = 0$, tai tiesė sutampa su x ašimi (šiuo atveju tiesės lygtis yra dar paprastesnė: $y = 0$.

2) $b = 0$, $a \neq 0$. Tiesės lygtis yra $x = -\frac{c}{a}$, t.y. tiesė lygiagreti y ašiai. Jei $b = 0$ ir $c = 0$, tai tiesė sutampa su y ašimi (šiuo atveju tiesės lygtis yra dar paprastesnė: $x = 0$).

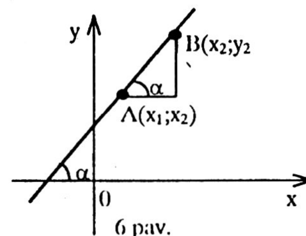
3) $c = 0$. Tiesė eina per koordinačių pradžios tašką, jos lygtis yra $y = -\frac{a}{b}x$.

- Jei $b \neq 0$, tai bendrąją tiesės lygtį $ax + by + c = 0$ galima taip užrašyti:

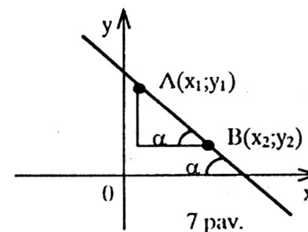
$$y = kx + l; \quad \text{čia } k = -\frac{a}{b}, \quad l = -\frac{c}{b}.$$

Skaičius k vadinamas **tiesės krypties koeficientu.**

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\,\alpha \text{ (žr.6 pav.)}, \qquad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -tg\,\alpha \text{ (žr. 7 pav.)};$$



6 pav.



7 pav.

Tiesės krypties koeficiento **geometrinė prasmė:** tiesės lygties koeficiento k modulis lygus smailiojo kampo, kurį sudaro tiesė su x ašimi, tangentui.

Tiesių $y = k_1 + l_1$ ir $y = k_2x + l_2$ lygiagretumo ir statmenumo sąlygos atitinkamai yra :

$$k_1 = k_2; \quad k_1 \cdot k_2 = -1$$

4. PLOKŠTUMOS LYGTIS

Plokštumos, einančios per tašką $A(x_0; y_0; z_0)$ ir statmenos vektoriui $\vec{n}(a; b; c)$ lygtis :

$$a(x-x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

(žr. 8 pav).

Bendroji plokštumos lygtis:

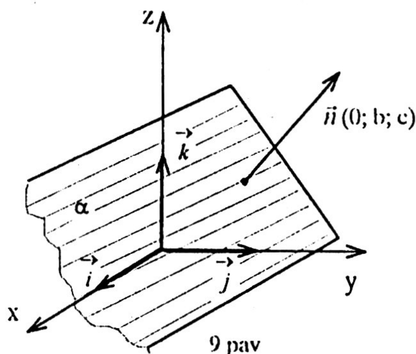
$$ax + by + cz + d = 0$$

čia koeficientai a, b, c yra plokštumai statmeno vektoriaus $\vec{n}$ koordinatės; vektorius $\vec{n}$ vadinamas plokštumos **normalės vektoriumi.**

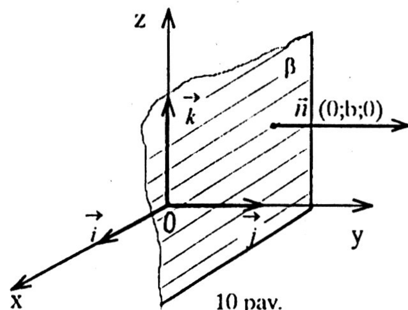
8 pav.

Atskiri atvejai:

1) d = 0. Koordinačių sistemos pradžia $O(0; 0; 0)$ yra plokštumoje, t.y. plokštuma eina per koordinačių pradžią.
2) Vienas iš koeficientų a, b, c lygus nuliui. Plokštuma lygiagreti vienai iš koordinačių ašių ir kerta kitas dvi. *Pavyzdžiui*, jei $a = 0$, tai normalės vektorius $\vec{n}(0; b; c)$ statmenas (Ox) ašiai ir plokštuma lygiagreti (Ox) ašiai ir kerta kita dvi koordinačių ašis (Oy) ir (Oz) (žr. 9 pav.).
3) Bendrojoje plokštumos lygtyje tiktai vienas iš koeficientų a, b arba c nelygus nuliui, o kiti du lygūs nuliui. Šiuo atveju plokštuma lygiagreti dviem koordinačių ašims, t.y. lygiagreti vienai iš koordinačių plokštumų. Pavyzdžiui, jei $b \neq 0$, o $a = c = 0$, tai normalės vektorius lygus $\vec{n}(0; b; 0)$. Reiškia $\vec{n} \perp (Ox)$ ir $\vec{n} \perp (Oz)$, o plokštuma, kurios lygtis $by + d = 0$ lygiagreti abscisių (Ox) ir aplikačių (Oz) ašims (žr. 10 pav.), t.y. lygiagreti koordinačių plokštumai Ozx.



9 pav



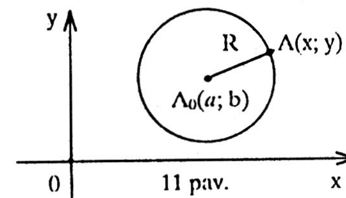
10 pav.

5. APSKRITIMO LYGTIS

Apskritimo lygtis - lygtis su dviem kintamaisiais x ir y, kurių tenkina kiekvieno apskritimo taško koordinatės.

Jei $(x; y)$ - bet kurio apskritimo taško koordinatės, (a, b) - apskritimo centro A_0 koordinatės, o R - apskritimo spindulys (žr. 11 pav.), tai apskritimo lygtis yra

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

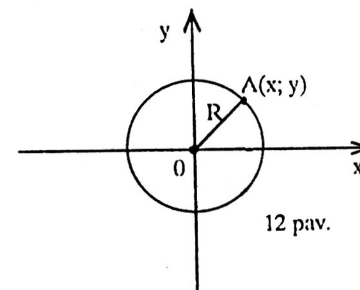


11 pav.

Pavyzdžiui, $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ yra lygtis apskritimo, kurio centras yra taške A_0, turinčiame koordinates (2; 3), o spindulys lygus 3.

Jeigu apskritimo centras sutampa su koordinačių pradžios tašku (žr. 12 pav.), tai tokio apskritimo lygtis yra

$$x^2 + y^2 = R^2$$



12 pav.

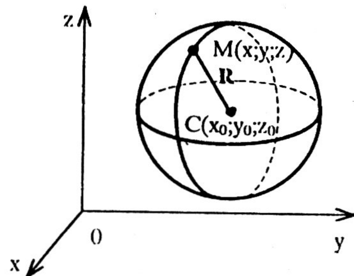
6. SFEROS LYGTIS

Stačiakampėje koordinačių sistemoje $Oxyz$ sferos, kurios spindulys R ir centras $C(x_0; y_0; z_0)$ (žr. 13 pav.) lygtis yra

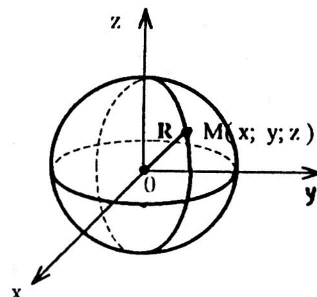
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Jei sferos centras yra koordinačių pradžios taškas, o spindulys yra R (žr. 14 pav.), tai sferos lygtis yra

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



13 pav.



14 pav.

7. SFEROS IR PLOKŠTUMOS TARPUSAVIO PADĖTIS

Sferos spindulį pažymėkime raide **R**, o atstumą nuo jos centro iki plokštumos α - raide **d**. Galimos trys sferos ir plokštumos tarpusavio padėtys erdvėje.

1) **Jei d<R,** t.y. kai atstumas nuo sferos centro iki plokštumos mažesnis už sferos spindulį, **sferos ir plokštumos sankirta yra apskritimas.** Rutulio ir plokštumos sankirta šiuo atveju yra **skritulys.**

2) **Jei d=R,** t.y. kai atstumas nuo sferos centro iki plokštumos lygus sferos spinduliui, **sfera ir plokštuma turi tik vieną bendrą tašką.**

3) **Jei d>R,** t.y. kai atstumas nuo sferos centro iki plokštumos didesnis už sferos spindulį, **sfera ir plokštuma neturi bendrų taškų.**

Išspręsime keletą skyriaus "Koordinačių metodas" uždavinių

1 uždavinys.

Duotos trikampio viršūnės : A (-2 ; -3) , B (-1 ; 2) , C (4 ; 1). Įrodykite, kad trikampis ABC - lygiašonis, ir parašykite tiesės, kurioje yra iš viršūnės B nubrėžta aukštinė, lygtį.

Sprendimas.

Koordinačių plokštumoje atidėkime taškus A (-2 ; -3), B (-1 ; 2), C (4 ; 1). Sujungę juos tiesių atkarpomis, gauname trikampį ABC (žr. 15 pav.) Reikia įrodyti, kad jo kraštinės AB ir BC lygios. Kraštinės AB ilgis lygus atstumui tarp taškų A ir B, o kraštinės BC ilgis lygus atstumui tarp taškų B ir C. Turime :

$$AB = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (2-(-3))^2} = $$
$$= \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

15pav.

$$BC = \sqrt{(4-(-1))^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

Taigi AB=BC. Vadinasi, trikampis ABC lygiašonis. Iš viršūnės B nubrėžkime aukštinę BD (žr. 15 pav.). Kadangi lygiašonio trikampio aukštinė, nubrėžta iš viršūnės B, yra kartu ir jo pusiaukraštinė, tai taškas D yra kraštinės AC vidurys. Jeigu jo koordinates pažymėsime x ir y (D(x ; y)), tai

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad , \quad y = \frac{-3+1}{2} = -1 \ .$$

Sakykime, tiesės, kurioje yra aukštinė BD, lygtis yra $y=kx+\ell$. Kadangi ši tiesė eina per taškus B(-1 ; 2) ir D(1 ; -1), tai jų koordinatės turi tenkinti minėtą lygtį.

Turime : $2= k\cdot(-1)+\ell$; $-1=k+\ell$. Iš antrosios lygties $k=-1-\ell$. Įrašę šią k išraišką į pirmąją lygtį, gauname $2=(-1-\ell)\cdot(-1)+\ell$, arba $2=2\ell+1$. Iš čia $\ell=½$.

Tada $k=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$. Vadinasi, ieškomoji tiesės lygtis yra $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$, arba $3x+2y-1=0$.

2 uždavinys. Apskritimo skersmens galiniai taškai yra A(-3 ; -1) ir B(7 ; 1).
Parašykite apskritimo lygtį.

Sprendimas.

Kadangi apskritimo centras $O(x_o ; y_o)$ yra skersmens AB vidurio taškas, tai centro koordinatės yra $x_o = \frac{-3+7}{2} = 2$; $y_o = \frac{-1+1}{2} = 0$. Taigi apskritimo centras yra **O(2 ; 0).**

Apskritimo spindulys R yra atkarpos OA (arba atkarpos OB) ilgis, kuris lygus atstumui tarp taškų O ir A. Randame atstumą tarp taškų O ir A :

$$OA = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{26}$$

Taigi apskritimo spindulys $\mathbf{R} = \sqrt{26}$.

Tada ieškomoji apskritimo lygtis yra $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=R^2$, kur x_o, y_o - apskritimo centro koordinatės. Surašę į šią lygtį rastąsias x_o, y_o ir R reikšmes, gauname, kad apskritimo lygtis yra $(x - 2)^2 + y^2 = 26$.

Atsakymas. $(x - 2)^2 + y^2 = 26$.

3 uždavinys. Parašykite lygtį plokštumos, einančios per koordinačių pradžią ir statmenos vektoriui $\vec{n}\{ -2 ; 1 ; 3 \}$.

Sprendimas. Plokštumos, einančios per tašką $M(x_o ; y_o ; z_o)$ ir statmenos vektoriui $\vec{n}\{ a ; b ; c \}$, lygtis yra $a(x - x_o)+b(y - y_o)+c(z - z_o)=0$. Į pastarąją lygtį įrašę normalės vektoriaus $\vec{n}\{ -2 ; 1 ; 3 \}$ koordinates ($a=-2$, $b=1$, $c=3$) ir taško M koordinates ($x_o=0$, $y_o=0$, $z_o=0$), gauname, kad ieškomoji plokštumos lygtis yra

$$-2(x - 0)+1(y - 0)+3(z - 0)=0 \text{ , arba } -2x+y+3z=0$$

Atsakymas. $-2x+y+3z=0$.

4 uždavinys. Parašykite lygtį plokštumos, einančios per tris taškus
A(0 ; 1 ; 5) , B(3 ; 0 ; 0) ir C(-1 ; 1 ; 6).

Sprendimas. Sakykime, šios plokštumos lygtis yra $ax + by + cz + d=0$. Taškų A, B ir C koordinatės turi tenkinti šią lygtį, nes plokštuma eina per šiuos taškus. Sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} a \cdot 0+b \cdot 1+c \cdot 5+d=0 , \\ a \cdot 3+b \cdot 0+c \cdot 0+d=0 , \\ a \cdot (-1)+b \cdot 1+c \cdot 6+d=0 , \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} b+5c+d=0 , \\ 3a+d=0 , \\ -a+b+6c+d=0 . \end{cases}$$

Iš antrosios lygties randame **$d=-3a$**. Įrašę šią d reikšmę į pirmąją bei trečiąją sistemos lygtis, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} d=-3a , \\ b+5c=3a , \\ b+6c=4a . \end{cases}$$

Iš pastarosios sistemos antrosios lygties atėmę trečiąją, gauname, kad **$c=a$** . Įrašę šią c išraišką į lygtį $b+6c=4a$, gauname **$b=-2a$.**

Vadinasi, ieškomoji plokštumos lygtis yra $ax-2ay+az-3a=0$. Abi šios lygties puses padalįję iš $a\neq0$ (visi koeficientai a, b ir c vienu metu negali būti lygūs nuliui), gauname plokštumos lygtį $x - 2y + z - 3 = 0$.

Atsakymas. $x - 2y + z - 3 = 0$.

5 uždavinys. Parašykite lygtį plokštumos, einančios per tašką A(1 ; -3 ; 2) ir lygiagrečios plokštumai $4x - 2y - z + 7 = 0$.

Sprendimas. Jeigu plokštuma α lygiagreti plokštumai $ax+by+cz+d=0$, tai vektorius $\vec{n}\{a ; b ; c\}$ statmenas plokštumai α. Vadinasi, plokštumos $4x - 2y - z + 7=0$ normalės vektorius $\vec{n}\{4 ; -2 ; -1\}$ yra taip pat ir ieškomosios plokštumos normalės vektorius. Taigi plokštumos, einančios per tašką A(1 ; -3 ; 2) ir statmenos vektoriui $\vec{n}\{4 ; -2 ; -1\}$ (lygiagrečios plokštumai $4x - 2y - z+7=0$), lygtis yra $4(x - 1)+(-2)(y - (-3))+(-1)(z - 2)=0$, arba $4(x - 1) - 2(y + 3)-(z - 2)=0$, t.y. $4x - 2y - z - 8=0$.

Atsakymas. $4x - 2y - z - 8=0$.

PRIEDAI

I. GEOMETRIJOS UŽDAVINIŲ, DAŽNIAUSIAI PASITAIKANČIŲ STOJAMŲJŲ Į AUKŠTĄSIAS MOKYKLAS MATEMATIKOS EGZAMINŲ METU, TEMATIKA.

PLANIMETRIJA

1. APSKRITIMAS IR SKRITULYS

1. Dvi apskritimo liestinės kertasi smailiu kampu taške, kurio atstumas nuo centro lygus 25. Atstumas tarp lietimosi taškų lygus 24. Apskaičiuokite apskritimo spindulio ilgį.

   Atsakymas. 15.

2. Iš apskritimo vieno taško nubrėžtos dvi stygos, sudarančios statųjį kampą. Atstumas tarp tų stygų vidurio taškų lygus 3,6. Apskaičiuokite apskritimo skersmenį. **Atsakymas** 7,2.

3. Dviejų susikertančių apskritimų spinduliai lygūs 10 ir 17, o bendroji jų styga dalija centrus jungiančią atkarpą santykiu 2 : 5. Raskite bendrosios stygos ilgį.

   Atsakymas. 16.

4. Statmuo, nuleistas iš apskritimo taško į skersmenį, dalija jį į atkarpas, kurių ilgių skirtumas lygus 18. Apskaičiuokite apskritimo skersmens ilgį, kai statmuo lygus 12.

   Atsakymas. 30.

5. Apskritimo viduje skirtingose nuo centro pusėse nubrėžtos dvi lygiagrečios stygos, kurių ilgiai yra 36 ir 48. Atstumas tarp stygų lygus 42. Raskite apskritimo spindulio ilgį.

   Atsakymas. 30.

6. Vieno iš dviejų besiliečiančių apskritimų spindulys lygus 1, o šių apskritimų bedros liestinės atkarpos, esančios tarp lietimosi taškų, ilgis lygus 4. Raskite kito apskritimo spindulio ilgį. **Atsakymas.** 4.

7. Styga, kuri kerta apskritimo skersmenį, sudaro su juo 30^0 kampą ir dalija skersmenį į atkarpas, lygias 2,8 ir 7,4. Apskaičiuokite stygos atstumą iki apskritimo centro.

   Atsakymas. 1,15.

8. Iš vieno taško nubrėžtos dvi apskritimo liestinės, kurių ilgiai lygūs 120. Raskite apskritimo spindulį, kai atstumas tarp lietimosi taškų lygus 144. **Atsakymas.** 90.

9. Statmuo, nubrėžtas iš apskritimo taško į jo skersmenį, dalija jį į atkarpas, kurių ilgių skirtumas lygus 18. Raskite apskritimo spindulį, kai statmens ilgis lygus 12.

   Atsakymas. 15.

10. Taškas A yra dviejų apskritimų išorinio lietimosi taškas. Viena bendrųjų liestinių liečia tuos apskritimus taškuose B ir D, o AB=8 , AD=6. Raskite apskritimų spindulius.

    Atsakymas. $\frac{20}{3}, \frac{15}{4}$.

11. Skritulio, kurio spindulys lygus 13, viduje duotas taškas M, nutolęs nuo skritulio centro atstumu, lygiu 5. Per tašką M nubrėžta styga AB, kurios ilgis lygus 23. Raskite atkarpų, į kurias taškas M dalo stygą, ilgius. **Atsakymas.** 16 ; 9 .

12. Vieno apskritimo viduje nubrėžtas kitas apskritimas taip , kad apskritimai liečiasi. Tiesė, einanti per didesniojo apskritimo centrą, kerta didesnįjį apskritimą taškuose A ir D, o mažesnįjį apskritimą - taškuose B ir C. Raskite apskritimų spindulių santykį, jeigu AB : BC : CD = 3 : 7 : 2 . **Atsakymas.** $\frac{3}{2}$.

13. Apskritimo , kurio spindulys lygus 5, viduje nubrėžtas kitas apskritimas, kurio spindulys lygus 3. Mažesnysis apskritimas liečia didesnįjį. Didesniojo apskritimo styga AB liečia mažesnįjį apskritimą taške C taip, kad AC : CB=3 : 1. Raskite stygos AB ilgį.

    Atsakymas. 8.

14. Du apskritimai, kurių spinduliai lygūs $\sqrt{2}$ ir 1, kertasi taške A. Atstumas tarp apskritimų centrų lygus 2. Didesniojo apskritimo styga AC kerta mažesnįjį apskritimą taške B taip, kad šis taškas ją dalija pusiau. Raskite stygos AC ilgį. **Atsakymas.** $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

15. Du apskritimai, kurių spinduliai lygūs 5 ir 4, liečiasi iš išorės. Tiesė, liečianti mažesnįjį apskritimą taške A, kerta didesnįjį apskritimą taškuose B ir C taip, kad AB=BC. Raskite atkarpos AC ilgį. **Atsakymas.** 12.

16. Du apskritimai, kurių spinduliai lygūs $\sqrt{5}$ ir $\sqrt{2}$, kertasi taške A. Atstumas tarp apskritimo centrų lygus 3. Per tašką A nubrėžta tiesė, kertanti apskritimus taškuose B ir C taip, kad AB=AC. Raskite atkarpos AB ilgį. **Atsakymas.** $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

17. R spindulio viduje nubrėžtas r (r<R) spindulio apskritimas liečia didesnįjį apskritimą taške A. Per didesniojo apskritimo tašką B nubėžta tiesė liečia mažesnįjį apskritimą taške C, o BC=a. Raskite atkarpos AB ilgį. **Atsakymas.** $a\sqrt{\frac{R}{R-r}}$.

18.Dvi apskritimo, kurio spindulys lygus R, liestinės, nubrėžtos iš vieno taško, sudaro 60^0 kampą. Į šių liestinių sudaromą kampą įbrėžtas apskritimas, kuris liečią duotąjį apskritimą. Raskite apskritimo spindulį. **Atsakymas.** $\frac{R}{3}$; 3R .

19.Iš apskritimo vieno taško nubrėžtos 10 cm ir 12 cm ilgio stygos. Atsatumas tarp jų vidurio taškų 5 cm. Apskaičiuokite apskritimo spindulį. **Atsakymas.** $\frac{85}{8}$ cm.

20.Statmuo, nuleistas iš apskritimo taško į skersmenį, dalija jį santykiu 9 : 16. Raskite to taško atstumą nuo skersmens galų sumą, kai apskritimo spindulys lygus 25 .

Atsakymas. 70 .

2. TRIKAMPIS

21.Trikampio ABC kraštinių BC, AC ir AB ilgiai yra atitinkampai lygūs 50, 104 ir 102. Raskite trikampio aukštinės, išvestos iš viršūnės B, ilgį. **Atsakymas.** 48.

22.Trikampyje ABC duota AB=26 , BC=30 ir AC=28. Raskite plotą trikampio, apriboto aukštine ir pusiaukampine, nubrėžtomis iš viršūnės B, bei tiesės AC atkarpa.

Atsakymas. 36.

23.Trikampio ABC pusiaukampinė AD dalija kraštinę BC santykiu BD : CD=2 : 1. Kokiu santykiu pusiaukraštinė CE dalija šią pusiaukampinę ? **Atsakymas.** 3 : 1.

24.Trikampio kraštinės lygios 12, 15 ir 18. Apskritimas, kurio centras yra ilgiausioje trikampio kraštinėje, liečia trumpesniąsias kraštines. Raskite atkarpų, į kurias apskritimo centras dalo ilgiausiąją kraštinę, ilgius. **Atsakymas.** 8 ir 10.

25.Vieno trikampio kraštinės lygios 6,3 cm , 8,4 cm ir 10,5 cm. Raskite trikampio, panašaus į duotąjį, kraštinių ilgius, žinodami, kad jo perimetras 15,6 cm didesnis už duotojo trikampio perimetrą. **Atsakymas.** 10,2 cm ; 13,6 cm ; 17 cm.

26.Trikampio kraštinių santykis yra 13 : 14 : 15, o jo plotas lygus 336. Raskite į šį trikampį įbrėžtojo apskritimo spindulį. **Atsakymas.** 8 .

27.Trikampio ABC kampas A lygus 45^0, o kampas C - 30^0. Raskite kampą tarp šio trikampio aukštinės BD ir pusiaukraštinės BE. **Atsakymas.** $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

28.Trikampio dviejų kraštinių ilgiai lygūs 3 ir 8 cm. Ar gali trikampio plotas būti lygus: 1) 10 cm^2 ; 2) 15 cm^2 ; 3) 12 cm^2. **Atsakymas.** 1) taip; 2) ne; 3) taip.

29.Trikampio kraštinės proporcingos skaičiams 5, 12 ir 13. Raskite trikampio plotą, kai ilgiausios ir trumpiausios trikampio kraštinių ilgių skirtumas lygus 1,6.

Atsakymas. 1,2.

30.Trikampio ABC kampai B ir C sutinka kaip 3 : 1, o kampo A pusiaukampinė trikampį ABC dalija į du trikampius, kurių plotai sutinka kaip 2 : 1. Raskite trikampio kampus.

Atsakymas. 60^0 , 30^0 , 90^0 .

31.Apskritimas, įbrėžtas į trikampį ABC, dalija pusiaukraštinę BM į tris lygias atkarpas. Raskite trikampio ABC kraštinių ilgių santykį. **Atsakymas.** BC : AC : AB=5 : 10 : 13.

32.Trikampio ABC kampas A lygus 75^0, o aukštinė h_c , nubrėžta iš kampo C, lygi $\frac{1}{2}$AB. Raskite kampą C. **Atsakymas.** **75^0.**

33.Statmuo, nubrėžtas iš trikampio ABC kraštinės AB vidurio D, kerta kraštinę AC taške M, o statmuo, nubrėžtas iš kraštinės AC vidurio E, kerta kraštinę AB taške N; $\frac{AM}{CM}=3$, $\frac{AN}{BN}=2$. Raskite trikampio ABC kampus.

Atsakymas. $A=45^0$, $B=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$, $C=\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$.

34.Trikampio ABC kraštinėje BC pažymėtas taškas D taip , kad BD : CD=1 : 2 . Kokiu santykiu pusiaukraštinė CE dalija atkarpą AD ? **Atsakymas.** 3 : 2 .

35.Vienas trikampio kampas lygus kitų dviejų kampų sumai, trumpiausioji kraštinė lygi 2, o trikampio ploto ir apie tą trikampį apibrėžto apskritimo ilgio santykis lygus $\frac{1}{4}$. Raskite ilgiausiąją trikampio kraštinę. **Atsakymas.** $\frac{8}{\sqrt{16-\pi^2}}$.

36. Vienas trikampio kampas lygus kitų dviejų kampų skirtumui, trumpiausioji kraštinė lygi 1, o kvadratų, nubrėžtų ant kitų dviejų kraštinių, plotų suma yra du kartus didesnė už apibrėžto apie tą trikampį skritulio plotą. Raskite ilgiausiąją trikampio kraštinę.

Atsakymas. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-\pi}}$.

37. Trikampio ABC plotas lygus 16 cm^2, AC=5 cm, BC=8 cm, o kampas C yra bukas. Raskite AB. **Atsakymas.** $\sqrt{137}$ cm.

38. Raskite trikampio plotą, jeigu viena trikampio kraštinė yra 40 cm, o kampai prie jos 35^0 ir 45^0. **Atsakymas.** $400(1\text{-tg}10^0)$.

39. Trikampio aukštinės lygios12 cm, 15 cm, 20 cm. Raskite jo plotą. **Atsakymas.** 150 cm^2.

40. Lygiakraščio trikampio aukštinė pratęsta už pagrindo tiek, kad tąsa kartu su aukštine būtų lygi trikampio kraštinei. Iš tokio brėžinio apskaičiuokite tg 15^0.

Atsakymas. $2-\sqrt{3}$.

41. Trikampio kraštinių ilgiai yra 11, 13, 12. Į ilgiausią kraštinę nubrėžta pusiaukraštinė. Raskite jos ilgį. **Atsakymas.** 9,5.

42. Dvi trikampio kraštinės lygios 6 cm ir 8 cm. Į jas nubrėžtos pusiaukraštinės yra viena kitai statmenos. Raskite trečiąją trikampio kraštinę. **Atsakymas.** $5\sqrt{2}$ cm.

43. Trikampio ABC kraštinės lygios AB=26 cm , BC=30 cm , AC=29 cm. Kokiu santykiu į trikampį įbrėžto apskritimo centras dalija pusiaukampinę, išvestą iš viršūnės B ?

Atsakymas. 2 : 1 .

44. Trikampio pusiaukraštinių ilgiai lygūs 5, 6 ir 5 cm. Raskite apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulį. **Atsakymas.** $\frac{194}{27}$ cm.

45. Trikampio kraštinių santykis 5 : 4 : 3 . Raskite atkarpų, į kurias įbrėžtinio apskritimo lietimosi taškas dalija kraštines, santykį. **Atsakymas.** 3 : 1 , 3 : 2 , 2 : 1 .

46. Trikampio aukštinė, kurios ilgis lygus 2 cm, dalija trikampio kampą santykiu 2 : 1, o trikampio pagrindą - į dvi dalis, kurių trumpesnioji lygi 1 cm. Apskaičiuokite to trikampio plotą. **Atsakymas.** $\frac{11}{3}$ cm.

47. Trikampio ABC kraštinėje pažymėtas taškas D. Apskritimai, įbrėžti į trikampius ABD ir BCD, liečia kraštinę AC atitinkamai taškuose M ir N. Raskite trikampio ABC kraštinių ilgius, jeigu AM=3 , MD=2 , DN=2 , NC=4. **Atsakymas.** $\frac{21}{2}, \frac{23}{2}, 1$.

48. Trikampio aukštinė lygi 25. Kokiu atstumu nuo viršūnės reikia nubrėžti tiesę, statmeną šiai aukštinei, kad išvestoji tiesė dalytų trikampio plotą į dvi lygias dalis ?

Atsakymas. $12,5\cdot\sqrt{2}$.

49. Viena trikampio kraštinė lygi 15, o kitų dviejų kraštinių ilgių suma yra 27. Raskite kampo, esančio prieš duotąją kraštinę, kosinusą, jei įbrėžtojo apskritimo spindulys lygus 4. **Atsakymas.** $\frac{5}{13}$.

50. Dvi trikampio kraštinės lygios 3 ir 6. Aukštinių, nuleistų į šias kraštines, ilgių aritmetinis vidurkis yra lygus trečiajai trikampio aukštinei. Raskite trečiosios kraštinės ilgį.

Atsakymas. 4.

51. Trikampyje aukštinė ir pusiaukraštinė, išvestos iš vienos viršūnės, dalija prie šios viršūnės esantį kampą į tris lygias dalis. Raskite trikampio kampus.

Atsakymas. 30^0 , 60^0 , 90^0.

52. Smailiajame trikampyje ABC pusiaukraštinės BM , CN ir aukštinė AH atitinkamai lygios 4 , 5 ir 6. Raskite trikampio plotą. **Atsakymas.** $8+2\sqrt{7}$.

53. Dvi smailiojo trikampio aukštinės atitinkampai lygios 3 cm ir $2\sqrt{2}$ cm, o jų susikirtimo taškas dalija trečiąją auštinę santykiu 5 : 1, skaičiuojant nuo trikampio viršūnės. Apskaičiuokite trikampio plotą.. **Atsakymas.** 6 cm^2.

54. Trikampio kampų santykis yra 2 : 3 : 7. Trumpiausios kraštinės ilgis lygus a. Raskite apie šį trikampį apibrėžto apskritimo spindulį. **Atsakymas.** a.

55. Į skritulį įbrėžtas taisyklingasis trikampis ir apie tą patį skritulį apibrėžtas taisyklingasis trikampis. Raskite tų trikampių plotų santykį. **Atsakymas.** 1 : 4.

56. Stačiojo trikampio statiniai sutinka kaip 3 : 4, o aukštinė, nubrėžta į įžambinę, lygi 24. Raskite statinių ilgius. **Atsakymas.** 30 ir 40.

STATUSIS TRIKAMPIS

57.Raskite stačiojo trikampio kraštines, jei jos sudaro aritmetinę progresiją, o trikampio įžambinė lygi 35. **Atsakymas**. 21 , 28 , 35.

58.Stačiojo trikampio ABC ($\angle C=90^0$) perimetras lygus 72 cm, o pusiaukraštinės CK ir aukštinės CM ilgių skirtumas lygus 7 cm. Raskite trikampio ABC plotą.

Atsakymas. 144 cm^2.

59.Stačiojo trikampio statinių ilgiai 12 cm ir 35 cm. Raskite pusiaukraštinės, išvestos į įžambinę, ilgį. **Atsakymas**. 12 cm .

60.Stačiojo trikampio pusiaukampinė dalija statinį į 4 cm ir 5 cm atkarpas. Raskite šio trikampio perimetrą. **Atsakymas**. 36.

61.Stačiojo trikampio kraštinių ilgiai sudaro aritmetinę progresiją. Apskaičiuokite tokio trikampio smailiuosius kampus. **Atsakymas**. $\arcsin\frac{3}{5}$; $90^0-\arcsin\frac{3}{5}$.

62.Stačiajame trikampyje ABC kampas B status, o pusiaukraštinės AD ir BE tarpusavy statmenos. Raskite kampą C. **Atsakymas**. $\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

63.Stačiojo trikampio aukštinė, išvesta į įžambinę, dalija ją į dvi dalis, kurių ilgių skirtumas lygus 6 cm. Raskite šio trikampio statinių ilgius, jeigu aukštinės ilgis lygus 4 cm.

Atsakymas. $4\sqrt{5}$ cm ir $2\sqrt{5}$ cm.

64.Stačiojo trikampio vienas statinis 10 vienetų ilgesnis už kitą statinį, bet 10 vienetų trumpesnis už įžambinę. Raskite trikampio plotą. **Atsakymas**. 600.

65.Stačiojo trikampio aukštinė, nuleista į įžambinę, lygi 12. Raskite trikampio perimetrą, kai įžambinė lygi 25. **Atsakymas**. 60.

66.Apie statųjį trikampį ABC apibrėžtas apskritimas. Atstumai nuo įžambinės galų A ir B iki tiesės, liečiančios apskritimą taške C, atitinkamai lygūs m ir n. Raskite statinių AC ir BC ilgius. **Atsakymas**. $\sqrt{m^2+mn}$, $\sqrt{n^2+nm}$.

67.Stačiajame trikampyje iš stačiojo kampo viršūnės nubrėžtos aukštinė ir pusiaukraštinė. Jų ilgių santykis lygus 40 : 41. Rasti statinių ilgių santykį. **Atsakymas**. 0,8.

68.Stačiojo trikampio plotas lygus Q, o smailusis kampas lygus α. Raskite atstumą nuo pusiaukraštinių susikirtimo taško iki įžambinės. **Atsakymas**. $\frac{1}{3}\sqrt{Q\sin 2\alpha}$.

69.Stačiojo trikampio statinių pusiaukraštinės lygios $\sqrt{52}$ ir $\sqrt{73}$. Raskite trikampio įžambinę. **Atsakymas**. 10.

70.Stačiojo trikampio įžambinės taškas yra vienodai nutolęs nuo statinių ir dalija įžambinę į 40 cm ir 30 cm ilgio atkarpas. Raskite trikampio statinius.

Atsakymas. 56 cm , 42 cm.

71.Stačiojo trikampio įžambinė lygi 41, o jo plotas lygus 180. Raskite trikampio statinius.

Ataskymas. 9 ir 40.

72.Raskite stačiojo trikampio plotą, jeigu jo aukštinė dalija įžambinę į 32 cm ir 18 cm ilgio atkarpas. **Atsakymas**. 6 dm^2.

73.Stačiojo trikampio statiniai lygūs 10 ir 24. Raskite ilgį apskritimo , nubrėžto per trumpesniojo statinio vidurį ir liečiančio įžambinę jos viduryje. **Atsakymas**. $31{,}2\cdot\pi$.

74.Apskritimas, kurio centras yra stačiojo trikampio įžambinėje, liečia abu statinius. Rasti jo spindulį, kai trikampio statiniai lygūs 21 ir 28. **Atsakymas**. 12.

75.Į statųjį trikampį ABC ($\angle C=90^0$) įbrėžtas apskritimas, liečiantis šonines kraštines taškuose A_1 , B_1 , C_1 . AC=4 cm, BC=3 cm. Raskite trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ plotų santykį. **Atsakymas**. 5.

76.Stačiojo trikampio mažesniojo statinio projekcija į įžambinę lygi 3,6 , o įžambinės ilgis lygus 10. Raskite į šį trikampį įbrėžto apskritimo spindulį. **Atsakymas**. 2.

77.Apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo spindulys lygus 8,5 ,o įbrėžto - 3. Raskite trikampio plotą. **Atsakymas**. 60.

78.Stačiojo trikampio statinių ilgių santykis lygus 1,05 , o apie trikampį apibrėžto ir į trikampį įbrėžto apskritimų spindulių ilgių skirtumas lygus 17 dm. Raskite trikampio plotą. **Atsakymas**. 8,4 m^2.

79.Stačiojo trikampio statinių santykis lygus $\frac{4}{5}$, o aukštinė, išvesta į įžambinę, lygi 12. Apskaičiuoti apibrėžto apie tą trikampį apskritimo spindulį. **Atsakymas**. 12,3.

80. Raskite stataus trikampio didesniojo smailaus kampo sinusą, kai apie šį trikampį apibrėžto apskritimo spindulys 2,5 karto didesnis už įbrėžtojo į trikampį apskritimo spindulį. **Atsakymas**. 0,8.

81. Stačiojo trikampio plotas lygus 60, o jo perimetras 40. Raskite apie tą trikampį apibrėžto apskritimo spindulį. **Atsakymas**. 8,5.

82. Stačiojo trikampio ABC kampas C status, o AC : AB=4 : 5. Apskritimas, kurio centras yra statinyje AC, liečia įžambinę AB, o statinį BC kerta taške P taip, kad BP : PC=2 : 3. Raskite apskritimo spindulio ir statinio BC santykį. **Atsakymas**. 13 : 20.

83. Stačiojo trikampio įžambinės ilgis lygus a, o įbrėžtinio apskritimo spindulys r. Raskite trikampio plotą. **Atsakymas**. $(a+r)r$.

84. Į statųjį trikampį, kurio mažesniojo statinio ilgis yra 10, įbrėžto apskritimo spindulys lygus 3. Raskite apie šį trikampį apibrėžto apskritimo spindulį. **Atsakymas**. 7,25.

85. Stačiojo trikampio statiniai lygūs 15 ir 20. Raskite atstumą nuo į trikampį įbrėžto apskritimo centro iki aukštinės, nubrėžtos į įžambinę. **Atsakymas**. 1.

86. Stačiojo trikampio pusiaukraštinė, išvesta į įžambinę, dalija statųjį kampą santykiu 1 : 2. Raskite šio trikampio smailiuosius kampus. **Atsakymas**. 60^0 ; 30^0.

87. Stačiojo trikampio vieno statinio ir įžambinės ilgių suma lygi c. Kokie turi būti statinių ilgiai, kad trikampio plotas būtų didžiausias ? **Atsakymas**. $\frac{1}{3}c$, $\frac{1}{3}c\sqrt{3}$.

88. Į statųjį trikampį įbrėžto pusapskritimio skersmuo yra įžambinėje, jo centras dalija įžambinę į 30 cm ir 40 cm atkarpas, o lankas liečia trikampio statinius. Raskite pusapskritimio lanko, esančio tarp lietimosi taškų, ilgį. **Atsakymas**. 12π.

LYGIAŠONIS TRIKAMPIS

89. Lygiašonio trikampio kraštinės santykiuoja kaip 2 : 3 : 3 , o įbrėžtojo skritulio spindulys lygus 1. Apskaičiuokite to skritulio plotą. **Atsakymas**. $4\sqrt{2}$.

90. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 8, o aukštinės, nuleistos į pagrindą, ilgis 3. Raskite trikampio pagrindo vidurio taško atstumą iki šoninės kraštinės. **Atsakymas**. 2,4.

91. Lygiašonio trikampio aukštinės ir pagrindo santykis lygus $\frac{3}{2}$. Raskite trikampio plotą, kai jo šoninė kraštinė lygi 10. **Atsakymas**. 30.

92. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 8, o šoninė kraštinė 12. Raskite ilgį atkarpos, jungiančios trikampio kampų prie pagrindo pusiaukampinių ir šoninių kraštinių susikirtimo taškus. **Atsakymas**. 4,8.

93. Lygiašonio trikampio pagrindo ir šoninės kraštinės santykis lygus 6 : 5. Raskite to trikampio aukštinės, nuleistos į pagrindą, ilgį, kai jo plotas lygus 48. **Atsakymas**. 8.

94. Į statųjį lygiašonį trikampį įbrėžtas kvadratas, kurio dvi viršūnės yra įžambinėje, o kitos dvi statiniuose. Raskite kvadrato kraštinę, kai įžambinė lygi 3m. **Atsakymas**. 1 m.

95. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė lygi 39, o jo pagrindas lygus 30. Raskite į trikampį įbrėžto apskritimo spindulį. **Atsakymas**. 10.

96. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė 2 cm, o kampas prie viršūnės 120^0. Raskite apie trikampio apibrėžto apskritimo skersmenį. **Atsakymas**. 4 cm.

97. Lygiašonio trikampio pagrindas 9,6 mažesnis už šoninę kraštinę, o pusiaukampinė šoninę kraštinę dalija į atkarpas, kurių santykis lygus 0,6. Raskite trikampio perimetrą. **Atsakymas**. 62,4.

98. Apie spindulio R apskritimą apibrėžtas lygiašonis trikampis, kurio kampas prie viršūnės 120^0. Raskite trikampio kraštines. **Atsakymas**. $R(\frac{\sqrt{3}}{3}+\mathrm{ctg}15^0)$; $2R\mathrm{ctg}15^0$.

99. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė lygi 4, o jos pusiaukraštinės ilgis 3. Raskite pagrindo ilgį. **Atsakymas**. $\sqrt{10}$.

100. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 48, o šoninė kraštinė lygi 30. Į šį trikampį įbrėžtas ir apie jį apibrėžtas apskritimai. Raskite atstumą tarp apskritimų centrų. **Atsakymas**. 15.

101. Lygiašoniame trikampyje ABC (AB=BC) pusiaukraštinė AD yra statmena pusiaukampinei CE. Raskite kampą ACB. **Atsakymas**. $\arccos\frac{1}{4}$.

3. KETURKAMPIAI

BET KOKS KETURKAMPIS

102.Į keturkampį, kurio iš eilės einančios kraštinės lygios 2, 3 ir 4, įbrėžtas apskritimas. Rasti keturkampio plotą, kai apskritimo spindulys yra 1,2. **Atsakymas.** 7,2.

103. Keturkampio plotas lygus S. Per jo viršūnes nubrėžtos tiesės, lygiagrečios įstrižainėms. Raskite gautojo keturkampio plotą. **Atsakymas.** 2 S .

104. Keturkampio įstrižainių ilgiai lygūs 10 ir 20, o kampas tarp jų lygus 60^0. Raskite plotą keturkampio , kurio viršūnės yra duotojo keturkampio kraštinių vidurio taškai.

Atsakymas. $25\sqrt{3}$.

LYGIAGRETAINIS

105. Lygiagretainio smailusis kampas 60^0, o jo perimetro ilgis lygus 90. Raskite lygiagretainio kraštines, jei įstrižainė dalija jo bukąjį kampą į dvi dalis santykiu 1 : 3.

Atsakymas. 15 ; 30.

106. Lygiagretainio kraštinės ilgiai lygūs 4 ir 2, o smailusis kampas tarp jo įstrižainių lygus 60^0. Raskite lygiagretainio plotą. **Atsakymas.** $2\sqrt{3}$.

107. Lygiagretainio kraštinės lygios 15 ir 12, o jo nelygių aukštinių suma lygi 22,5. Raskite didesniosios lygiagretainio aukštinės ilgį. **Atsakymas.** 12,5.

108. Lygiagretainio įstrižainės lygios 14 ir 18, o kampo tarp jų kosinusas lygus $\frac{11}{21}$. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą. **Atsakymas.** 44.

109. Apskaičiuokite lygiagretainio plotą, kai jo ilgesnioji įstrižainė lygi 5 cm,o aukštinės - 2 cm ir 3 cm. **Atsakymas.** $\frac{6}{5}\left(3\sqrt{21}-8\right)$ cm^2.

110. Lygiagretainio bukojo kampo pusiaukampinė dalija lygiagretainio kraštinę į atkarpas, lygias 5 ir 15. Rasti lygiagretainio perimetrą. **Atsakymas.** 70.

111. Lygiagretainio plotas lygus 36, perimetras lygus 30, o atstumas tarp ilgesniųjų kraštinių lygus 4. Raskite atstumą tarp lygiagretainio trumpesniųjų kraštinių. **Atsakymas.** 6.

112. Lygiagretainio smailusis kampas lygus 60^0, o įstrižainių ilgių kvadratų santykis $\frac{19}{7}$. Raskite lygiagretainio gretimųjų kraštinių ilgių santykį. **Atsakymas.** $\frac{3}{2}$ arba $\frac{2}{3}$.

113. Lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi 712, o gretimų kraštinių ilgių skirtumas lygus 6. Raskite lygiagretainio perimetrą. **Atsakymas.** 52.

114. Lygiagretainio įstrižainės lygios 24 ir 28, o kraštinių ilgių skirtumas lygus 8. Raskite lygiagretainio kraštinių ilgius. **Atsakymas.** 22 ; 14 .

115. Trumpesnės lygiagretainio kraštinės ilgis lygus 13, aukštinės, nuleistos į ilgesnę kraštinę, ilgis 12, o trumpesnės įstrižainės ilgis lygus 15. Raskite lygiagetainio plotą.

Atsakymas. 540.

116. Lygiagretainį, kurio perimetras lygus 44, jo įstrižainės dalija į keturis trikampius. Dviejų gretimų trikampių perimetrų skirtumas lygus 6. Raskite lygiagretainio kraštinių ilgius. **Atsakymas.** 8 ; 14 .

117. Raskite lygiagretainio plotą, jeigu jo įstrižainių ilgiai lygūs 78, o trumpesniosios kraštinės ilgis lygus 25. **Atsakymas.** 1680.

118. Lygiagretainio kraštinės lygios 3 ir 2, o kampas tarp jų lygus $\arccos\frac{5}{16}$. Dvi statmenos tiesės dalija lygiagretainį į keturias lygiaplotes dalis. Apskaičiuokite atkarpų į kurias šios tiesės dalija lygiagretainio kraštines, ilgius. **Atsakymas.** 2 ir 1 ; $\frac{2}{3}$ ir $\frac{4}{3}$.

119. Apie skritulį apibrėžtas lygiagretainis, kurio smailusis kampas α. Rasti lygiagretainio plotą, kai skritulio plotas lygus 3π ir $\cos\alpha=0{,}8$. **Atsakymas.** 20.

120. Lygiagretainio kraštinės $\sqrt{2}$ ir $\sqrt{5}$, o smailusis kampas α. Rasti ilgesniosios įstrižainės ilgį, kai $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **Atsakymas.** 3.

121. Lygiagretainio ABCD aukštinė, nubrėžta iš bukojo kampo viršūnės B į kraštinę DA, dalija ją santykiu 5 : 3 skaičiuojant nuo viršūnės D. AD : AB=2. Raskite santykį AC : BD. **Atsakymas.** 2 : 1.

122. Lygiagretainio plotas lygus S, o jo aukštinės h_1 ir h_2. Rasti lygiagretainio perimetrą.

Atsakymas. $2S(h_1+h_2)\,/\,h_1h_2$.

123. Lygiagretainio plotas lygus S, viena jo įstrižainė dvigubai trumpesnė už kitą, o kampas tarp įstrižainių lygus α. Raskite įstrižainių ilgius. **Atsakymas.** $\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$; $2\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$.

Lygiagretainyje išvestos jo kampų pusiaukampinės. Šių pusiaukampinių ribojamo keturkampio plotas lygus $\frac{1}{4}$ duotojo lygiagretainio ploto. Raskite lygiagretainio kraštinių ilgių santykį. **Atsakymas**. 2 : 1.

ROMBAS

124. Rombo perimetras lygus $8\sqrt{13}$, o jo įstrižainių ilgių suma lygi 20. Raskite rombo plotą. **Atsakymas**. 48.

125. Raskite rombo aukštinę, jeigu rombo įstrižainės lygios 16 ir 12. **Atsakymas**. 9,6.

126. Rombo mažesnioji įstrižainė lygi jo kraštinei. Raskite rombo plotą, jeigu žinoma, kad į rombą įbrėžto skritulio plotas lygus π. **Atsakymas**. $8\sqrt{3}$

127. Rombo įsrižainių ilgių suma 6 mažesnė už jo perimetrą. Raskite rombo kraštinę, kai jo plotas lygus 24. **Atsakymas**. 5.

128. Rombo perimetras 24 cm, bukas kampas 150^0. Raskite rombo įstrižaines ir plotą. **Atsakymas**. $12\sin 15^0$ cm ; $12\cos 15^0$ cm ; 18 cm^2.

129. Rombo plotas lygus 96, o įstrižainių ilgių santykis lygus 0,75. Rasti rombo kraštinę. **Atsakymas**. 10.

130. Rombo trumposios įstrižainės ilgis lygus 5, o aukštinės - 3. Raskite rombo plotą. **Atsakymas**. $\frac{75}{8}$.

131. Rombo perimetras lygus 20, o vienos jo įstrižainės ilgis lygus 8. Raskite kitos įstrižainės ilgį. **Atsakymas**. 3 .

132. Aukštinė, nubrėžta iš rombo bukojo kampo viršūnės, dalija priešingą kraštinę pusiau. Raskite rombo kampus. **Atsakymas**. 60^0 ir 120^0.

133. Raskite rombo kampus, jeigu rombo perimetro kvadrato santykis su jo plotu lygus 32. **Atsakymas**. 30^0, 150^0.

134. Rombo kraštinės kvadratas lygus jo įstrižainių sandaugai. Raskite rombo smailųjį kampą. **Atsakymas**. 30^0.

135. Rombo trumpesnioji įstrižainė lygi 6 cm, smailusis kampas 60^0. Raskite kitą rombo įstrižainę, perimetrą ir plotą. **Atsakymas**. $6\sqrt{3}$ cm ; 24 cm ; $18\sqrt{3}$ cm^2.

136. Kiekvienoje rombo kraštinėje yra po vieną viršūnę kvadrato, kurio kraštinės lygiagrečios rombo įsrižainėms. Rombo įstrižainės lygios 8 ir 12. Raskite kvadrato kraštinės ilgį. **Atsakymas**. 4,8 .

137. Rombo įstrižainių ilgių santykis 3 : 4. Kiek kartų rombo plotas didesnis už įbrėžtojo į jį skritulio plotą ? **Atsakymas**. $\frac{25}{6\pi}$.

138. Raskite rombo plotą, jeigu jo ilgesnioji įstrižainė yra lygi p, o smailusis kampas dvigubai mažesnis už buką kampą. **Atsakymas**. $\frac{p^2\sqrt{3}}{6}$.

139. Į rombą, kurio smailusis kampas 30^0, įbrėžtas skritulys. Jo plotas Q. Apskaičiuokite rombo plotą. **Atsakymas**. $\frac{8Q}{\pi}$.

140. Rombo įstrižainių ilgiai ir kraštinės ilgis sudaro geometrinę progresiją. Raskite kampo tarp rombo kraštinės ir jo ilgesniosios įstrižainės sinusą jeigu žinoma, kad jis didesnis už $\frac{1}{2}$. **Atsakymas**. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$.

STAČIAKAMPIS

141. Stačiakampio perimetras lygus 14, o jo įstrižainių sudaromo kampo sinusas lygus 0,4. Raskite stačiakampio plotą. **Atsakymas**. 7.

142. Stačiakampio perimetras lygus 48, o jo įsrižainės sudaro kampą α. Raskite stačiakampio įstrižainės ilgį, kai $\sin\alpha = 0,44$. Atsakymas. 20 .

143. Stačiakampio įstrižainė lygi 20 ir su pagrindu sudaro 30^0 kampą. Raskite stačiakampio perimetrą. **Atsakymas**. $20(\sqrt{3}+1)$.

144.Raskite stačiakampio kraštines, jeigu jo plotas lygus 300, o perimetras lygus 74.

Atsakymas. 12 ir 25.

145.Stačiakampio perimetras lygus 46, o apibrėžto skritulio plotas lygus $72{,}25\pi$. Apskaičiuokite stačiakampio plotą. **Atsakymas.** 120.

146.Statmuo, nubrėžtas iš stačiakampio viršūnės į įstrižainę, dalija statųjį kampą santykiu 1 : 3. Apskaičiuokite, koks kampų tarp įstrižainių santykis ? **Atsakymas.** 1 : 3.

147.Stačiakampio plotas lygus 112. Ant dviejų gretimųjų stačiakampio kraštinių nubraižytų kvadratų plotų suma lygi 260. Raskite stačiakampio kraštines. **Atsakymas.** 8 ir 14.

148.Į kvadratą įbrėžtas stačiakampis, kurio kraštinės lygiagrečios kvadrato įstrižainėms. Kiekvienoje kvadrato kraštinėje yra stačiakampio viršūnė. Kvadrato įstrižainė lygi 12 m. Viena stačiakampio kraštinė du kartus ilgesnė už kitą. Raskite stačiakampio kraštines.

Atsakymas. 4 m. ir 8 m.

149.Ant stačiakampio kraštinių, kurių ilgiai lygūs 2 ir 4, nubraižyti lygiakraščiai trikampiai taip, kad kiekvieno jų viena iš kraštinių sutampa su atitinkama stačiakampio kraštine. Laisvąsias trikampių viršūnes sujungiame tiesių atkarpomis. Raskite gautojo stačiakampio plotą. **Atsakymas.** $16+10\sqrt{3}$.

150.Stačiakampio plotas lygus 12, o jo įstrižainių sudaromo kampo sinusas 0,2. Raskite stačiakampio perimetrą. **Atsakymas.** 24.

151.Į spindulio R skritulį reikia įbrėžti didžiausio ploto stačiakampį. Kokios turi būti tokio stačiakampio kraštinės ? **Atsakymas.** Kvadratas, kurio kraštinė $R\sqrt{2}$.

152.Skritulio plotas lygus Q. Į skritulį įbrėžtas stačiakampis. Raskite stačiakampio plotą, jeigu jo kraštinių ilgių santykis m : n. **Atsakymas.** $\frac{4Qmn}{\pi(m^2+n^2)}$.

153.Į spindulio R pusskritulį įbrėžtas didžiausio ploto stačiakampis. Raskite tokio stačiakampio kraštines. **Atsakymas.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, $R\sqrt{2}$.

154.Į R spindulio pusapskritimį įbrėžtas stačiakampis (pagrindas pusapskritimio skersmenyje). Kokios turi būti stačiakampio kraštinės, kad jo perimetras būtų didžiausias ? **Atsakymas.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}R$, $\frac{\sqrt{5}}{5}R$.

155.Raskite mažiausio perimetro stačiakampio, kurio plotas lygus Q, kraštines.

Atsakymas. Kvadratas, kurio kraštinė $\sqrt{Q}$.

156.Lango, kurio apatinė dalis yra stačiakampis, o viršutinė - pusapskritimis, plotas lygus 4. Koks turi būti lango pagrindas, kad lango angos perimetras būtų mažiausias.

Atsakymas. $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{4+\pi}}$.

157.Į trikampį, kurio pagrindo kraštinė lygi a, o aukštinė h, įbrėžtas didžiausio ploto stačiakampis. Raskite tokio stačiakampio plotą. **Atsakymas.** $\frac{ah}{4}$

KVADRATAS

158.Kvadrato plotas 30% didesnis už skritulio plotą, o skritulio plotas lygus 80 % trikampio ploto. Keliais procentais kvadrato plotas didesnis už trikampio plotą ?

Atsakymas. 4 %.

159.Į kvadratą įbrėžtas kitas kvadratas. Vienas iš smailiųjų kampų tarp kvadratų kraštinių lygus α. Kuriai α reikšmei įbrėžtojo kvadrato plotas sudarys $\frac{2}{3}$ duotojo kvadrato ploto ?

Atsakymas. $\alpha_1=15^0$, $\alpha_2=75^0$.

160.Apskritimas liečia dvi gretimas kvadrato kraštines ir dalija kiekvieną iš kitų dviejų jo kraštinių į 2 cm ir 23 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite apskritimo spindulį.

Atsakymas. 17 cm.

161.Į kvadratą, kurio įstrižainė lygi $10\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, įbrėžtas skritulys. Rasti skritulio plotą.

Atsakymas. 25.

162.Į skritulio nuopjovą, kurią atitinka 6 cm ilgio styga, įbrėžtas kvadratas. Jo kraštinė lygi 2 cm. Raskite skritulio spindulį. **Atsakymas.** $\sqrt{10}$ cm.

163.Į pusapskritimį, kurio spindulys lygus 5, įbrėžtas kvadratas taip, kad viena jo kraštinė yra pusapskritimio skersmuo, o dvi viršūnės priklauso apskritimui. Raskite kvadrato kraštinės ilgį. **Atsakymas.** $2\sqrt{5}$.

TRAPECIJA

165.Trapecijų pagrindų ilgiai lygūs 142 ir 89, o įstrižainių - 120 ir 153. Raskite trapecijos plotą. **Atsakymas.** 8316.

166.Trapecijos pagrindų ilgiai yra 8,2 ir 14,2 cm. Raskite atstumą tarp įstrižainių vidurio taškų. **Atsakymas.** 3 cm.

167.Tiesė, lygiagreti trapecijos pagrindams, dalija ją į dvi dalis, kurių plotai sutinka kaip m : n. Raskite šios tiesės atkarpos, esančios tarp trapecijos šoninių kraštinių, ilgį, jeigu trapecijos pagrindų ilgiai lygūs a ir b. **Atsakymas.** $\sqrt{\frac{na^2+mb^2}{m+n}}$.

168.Trapecijos ilgesnysis pagrindas lygus 5, o viena iš šoninių kraštinių lygi 3. Žinoma, kad viena iš trapecijos įstrižainių statmena duotajai šoninei kraštinei, o kita dalija kampą tarp duotosios šoninės kraštinės ir duotojo pagrindo pusiau. Raskite trapecijos plotą.
Atsakymas. 9,6.

169.Apie apskritimą apibrėžtos trapecijos perimetras lygus 36 cm. Raskite trapecijos vidurinę liniją. **Atsakymas.** 9 cm.

170.Trapecijos plotas lygus 377 m^2, aukštinė 13 cm, o pagrindai sutinka kaip 13 : 16. Raskite pagrindų ilgius. **Atsakymas.** 26 cm ir 32 cm.

171.Trapecijos įstrižainė dalija vidurinę liniją santykiu 8 : 3, o jos apatinio ir viršutinio pagrindų ilgių skirtumas lygus 20. Raskite trapecijos vidurinės linijos ilgį. **Atsakymas.** 22.

172.Trapecijos trumpesnysis pagrindas lygus 2, o prie jo esantys kampai turi po 135^0. Kampas tarp įstrižainių prieš pagrindą lygus 150^0. Apskaičiuokite trapecijos plotą.
Atsakymas. 2.

173.Vienas iš trapecijos kampų lygus 30^0, o pratęstos šoninės kraštinės susikerta, sudarydamos statų kampą. Raskite mažesniosios šoninės kraštinės ilgį, jeigu trapecijos vidurinė linija lygi 10 cm, o vienas iš pagrindų 8 cm. **Atsakymas.** 2 cm.

174.Prie trapecijos pagrindo esančių bukųjų kampų pusiaukampinių susikirtimo taškas priklauso kitam trapecijos pagrindui. Raskite trapecijos kraštines, jeigu jos aukštinės ilgis lygus 12 cm, o pusiaukampinių ilgiai lygūs 15 ir 13 cm.
Atsakymas. 16,9 cm ; 14 cm ; 12,5 cm ; 29,4 cm.

175.Trapecijos pagrindų ilgiai lygūs 16 ir 44, o šoninių kraštinių - 17 ir 25. Raskite trapecijos plotą. **Atsakymas.** 450.

176.Trapecijos pagrindų ilgiai 9 cm ir 7 cm, viena iš šoninių kraštinių, kurios ilgis 8 cm, su pagrindu sudaro 30^0 kampą. Raskite trapecijos plotą. **Atsakymas.** 32 cm^2.

177.Trapecijos ABCD šoninės kraštinės AB ir CD, pratęstos iki susikirtimo, kertasi taške E. Raskite atkarpos BE ilgį, jeigu BC=2, AD=6, o AB=3. **Atsakymas.** 1,5.

178.Trapecijos ABCD pagrindai BC ir AD atitinkamai lygūs 12 cm ir 27 cm. Nubrėžus įstrižainę AC, gauti lygūs kampai ABC ir ACD. Apskaičiuokite įstrižainės AC ilgį.
Atsakymas. 18 cm.

179.Apskritimas, kurio skersmuo yra trapecijos ABCD pagrindas AD, eina per trapecijos šoninių kraštinių AB ir CD vidurio taškus ir liečia pagrindą BC. Raskite trapecijos kampus. **Atsakymas.** 75^0, 105^0.

180.Trapecijos trumpesniojo pagrindo ilgis lygus 6,2 cm, o atstumas tarp įstrižainių vidurio taškų - 4 cm. Raskite ilgesniojo pagrindo ilgį. **Atsakymas.** 14,2 cm.

181.Trapecijos ABCD šoninės kraštinės AB ir CD pratęstos iki tarpusavio sankirtos taške M. Raskite CM, jei AB=1 m, CD=1,5 m, BM=0,8 m. **Atsakymas.** 1,2 m.

182.Apie apskritimą apibrėžta trapecija. Raskite trapecijos vidurinės linijos ir perimetro santykį. **Atsakymas.** 1 : 4.

183.Trapecijos vienas pagrindas du kartus ilgesnis už kitą. Per įstrižainių susikirtimo tašką nubrėžta tiesė, lygiagreti pagrindams. Raskite kiekvienos iš dviejų gautų trapecijų aukštinės bei duotosios trapecijos aukštinės santykį. **Atsakymas.** 1 : 3 ; 2 : 3.

184.Trapecijos pagrindai lygūs 84 cm ir 42 cm, o šoninės kraštinės - 39 cm ir 45 cm. Per įstrižainių susikirtimo tašką nubrėžta tiesė, lygiagreti pagrindams. Apskaičiuokite gautųjų trapecijų plotus. **Atsakymas.** 588 cm^2 ir 1680 cm^2.

185.Raskite trapecijos plotą, jeigu žinoma, kad sujungus jos kraštinių vidurio taškus gaunamas kvadratas, kurio kraštinės ilgis lygus a. **Atsakymas.** $2a^2$.

186.Trapecijos pagrindo ilgis lygus $2a$, o visų kitų trapecijos kraštinių ilgiai lygūs a. Raskite atstumą nuo vienos iš trapecijos šoninių kraštinių vidurio taško iki kitos šoninės kraštinės. **Atsakymas.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}a$.

187.Trapecijos pagrindų ilgiai a ir b. Atkarpa, lygiagreti pagrindams, dalija trapeciją į dvi lygiaplotes dalis. Raskite tos atkarpos ilgį. **Atsakymas.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

188.Į trapeciją, kurios trumpesnysis pagrindas lygus a, įbrėžtas apskritimas. Lietimosi taškas dalija vieną trapecijos šoninių kraštinių į m ir n ilgio atkarpas skaičiuojant nuo ilgesniojo pagrindo. Apskaičiuokite trapecijos plotą. **Atsakymas.** $a\sqrt{mn}\left(\frac{m+a-n}{a-n}\right)$.

189.Trapecijos mažesniojo pagrindo ir šoninių kraštinių ilgiai lygūs. Koks turi būti kampas prie trapecijos didesniojo pagrindo, kad trapecijos plotas būtų didžiausias.

Atsakymas. 60^0.

190.Trapecijos pagrindai 4 cm ir 16 cm. Raskite į trapeciją įbrėžto ir apie ją apibrėžto apskritimų spindulius. **Atsakymas.** 4 cm ; $\frac{5\sqrt{41}}{4}$ cm.

191.Trapecijos ABCD pagrindas BC lygus 130, o kampas BAD smailus ir dvigubai didesnis už kampą ADC. Apskritimas, kurio centras ant BC, liečia tieses AC , AD ir atkarpą CD. Rasti trapecijos ABCD plotą, jei apskritimo spindulys lygus 5. **Atsakymas.** 157,5.

192.Įrodykite, kad atkarpa, jungianti trapecijos pagrindų vidurio taškus, eina per trapecijos įstrižainių susikirtimo tašką bei šoninių kraštinių susikirtimo tašką.

LYGIAŠONĖ TRAPECIJA

193.Lygiašonės trapecijos mažasis pagrindas lygus šoninei kraštinei, o įstrižainė statmena šoninei kraštinei. Raskite trapecijos kampus. **Atsakymas.** 60^0 ir 120^0.

194.Lygiašonės trapecijos pagrinadai lygūs 12 ir 18, o kampo prie ilgesniojo pagrindo kotangentas lygus $\frac{3}{8}$. Raskite trapecijos įstrižainės ilgį. **Atsakymas.** 17.

195.Lygiašonės trapecijos aukštinės ir vidurinės linijos ilgių suma lygi c, o trapecijos plotas lygus S. Raskite kampo tarp trapecijos įstrižainių sinusą. **Atsakymas.** $\sin\alpha = \frac{2S}{c^2-2S}$.

196.Lygiašonės trapecijos įstrižainės tarpusavyje statmenos, o pagrindų ilgiai lygūs 12 ir 20. Raskite trapecijos plotą. **Atsakymas.** 256 .

197.Lygiašonės trapecijos pagrindų ilgiai lygūs 51 ir 69, o šoninės kraštinės ilgis lygus 41. Raskite trapecijos plotą. **Atsakymas.** 24 .

198.Lygiašonės trapecijos įstrižainė dalija jos buką kampą pusiau. Mažesnysis trapecijos pagrindas lygus 3 cm, o perimetras 42 cm. Raskite trapecijos plotą.

Atsakymas. 96 cm^2 .

199.Lygiašonės trapecijos įstrižainių susikirtimo taškas dalija įstrižainę santykiu 1 : 2. Raskite trapecijos plotą, jei šoninė kraštinė lygi 5 cm, o aukštinė 3 cm.

Atsakymas. 36 cm^2 .

200.Lygiašonės trapecijos vidurinė linija 24, o jos įstrižainės tarpusavy statmenos. Raskite trapecijos plotą. **Atsakymas.** 576 .

201.Lygiašonės trapecijos įstrižainės ilgis yra 10, o jos plotas 48. Raskite aukštinę.

Atsakymas. 8 arba 6 .

202.Lygiašonės trapecijos pagrindai lygūs 20 cm ir 8 cm, o smailusis kampas 60^0. Rasti šios trapecijos plotą ir perimetrą. **Atsakymas.** $84\sqrt{3}$ cm^2 ; 52 cm.

203.Lygiašonės trapecijos plotas lygus 480, o šoninė kraštinė lygi $8\sqrt{2}$. Rasti trapecijos didžiojo pagrindo ilgį, jei smailusis kampas lygus 45^0. **Atsakymas.** 68 .

204.Per lygiašonės trapecijos šonines kraštines nubrėžtos tiesės susikerta stačiuoju kampu. Trapecijos plotas lygus 12 cm^2, o aukštinė 2 cm. Apskaičiuokite trapecijos kraštines.

Atsakymas. 4 cm ; 8 cm ; $2\sqrt{2}$ cm ir $2\sqrt{2}$ cm.

205.Lygiašonės trapecijos šoninės kraštinės pratęstos iki susikirtimo sudaro statų kampą. Raskite trapecijos didžiojo pagrindo ilgį, kai jos aukštinė lygi 2, o plotas 12.

Atsakymas. 8 .

206.Apskaičiuokite lygiašonės trapecijos plotą, kai jos pagrindų ilgiai 10 cm ir 26 cm, o įstrižainės statmenos šoninėms kraštinėms. **Atsakymas.** 216 cm^2 .

207.Lygiašonės trapecijos pagrindai ir šoninė kraštinė atitinkamai sutinka kaip 10 : 4 : 5, o trapecijos plotas lygus 112. Raskite trapecijos perimetrą. **Atsakymas.** 48 .

208.Lygiašonės trapecijos aukštinė lygi h, o kampas tarp įstrižainių prieš šoninę kraštinę lygus α. Apskaičiuokite trapecijos vidurinę liniją. **Atsakymas.** $h\ \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

209.Lygiašonės trapecijos kampas prie pagrindo lygus 45^0, o aukštinės ir ilgesniojo pagrindo ilgių suma lygi a. Kokia turi būti trapecijos aukštinė, kad trapecijos plotas būtų didžiausias. **Atsakymas.** $\frac{a}{4}$.

210.Apie apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios vienas pagrindas tris kartus didesnis už kitą. Raskite apibrėžto apie trapeciją ir įbrėžto į trapeciją apskritimų spindulių santykį. **Atsakymas.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

211.Lygiašonės trapecijos vidurinė linija lygi 10 cm, o vienas pagrindas 8 cm. Apskaičiuokite trapecijos įstrižainę bei plotą, jei kampo prie didesniojo pagrindo tangentas lygus $\frac{\sqrt{21}}{2}$. **Atsakymas.** 11 cm, $10\sqrt{21}$ cm^2.

212.Raskite lygiašonės trapecijos perimetrą, jei jos pagrindai sutinka kaip 1 : 3, o aukštinė lygi mažesniajam pagrindui ir lygi $\frac{3}{5}(2-\sqrt{2})$. **Atsakymas.** 2,4.

213.Lygiašonės trapecijos pagrindų santykis lygus 3 : 2 . Apskritimas nubrėžtas taip, kad didesnysis jos pagrindas yra jo skersmuo, o iš viršutinio pagrindo iškerta atkarpą, lygią šio pagrindo pusei. Kokiu santykiu apskritimas dalija trapecijos šonines kraštines ?

Atsakymas. 1 : 2.

214.Rasti lygiašonės trapecijos , kurios pagrindai yra 20 cm ir 12 cm, šoninės kraštinės ir įsrižainės ilgius, jei žinoma, kad apibrėžto apskritimo centras yra didesniame pagrinde.

Atsakymas. $4\sqrt{5}$ cm , $8\sqrt{5}$ cm.

215.Lygiašonės trapecijos pagrindų ilgiai 6 ir 8 cm, o aukštinė 7 cm. Raskite apie trapeciją apibrėžto apskritimo spindulį ir atstumą nuo apskritimo centro iki šoninės kraštinės.

Atsakymas. 5 ; $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

216.Lygiašonės trapecijos pagrindai lygūs 40 ir 48, o aukštinė 8. Raskite apie tą trapeciją apibrėžto apskritimo spindulį, kai apskritimo centras yra šalia trapecijos.

Atsakymas. 25 .

217.Lygiašonės trapecijos pagrindai lygūs 21 ir 9 cm, o šoninė kraštinė 10 cm. Raskite apie tokią trapeciją apibrėžto apskritimo spindulį. **Atsakymas.** $\frac{69}{8}$ cm.

218.Apskritimo įbrėžto į lygiašonę trapeciją spindulys $\sqrt{6}$ kartų mažesnis už apskritimo, apibrėžto apie šią trapeciją, spindulį. Raskite kampą, esantį prie didesniojo trapecijos pagrindo. **Atsakymas.** 45^0.

219.Apskaičiuokite ilgesnįjį pagrindą lygiašonės trapecijos, apibrėžtos apie apskritimą, kai trapecijos šoninė kraštinė lygi 15, o apskritimo spindulys 6. **Atsakymas.** 24 .

220.Apie 2 cm spindulio apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios plotas 20 cm^2. Raskite trapecijos kraštines. **Atsakymas.** 4 ; 5 ; 6 .

221.Į lygiašonę trapeciją įbrėžtas apskritimas. Raskite jo spindulį, jeigu trapecijos pagrindai lygūs 9 ir 5 cm. **Atsakymas.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ cm.

222.Į lygiašonę trapeciją įbrėžtas apskritimas, kurios spindulys 10. Atstumas tarp šoninių kraštinių lietimosi su apskritimu taškų lygus 16. Raskite trapecijos plotą.

Atsakymas. 500.

223.Apie apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija. Keturkampio, kurio viršūnės yra lietimosi taškuose, plotas sudaro $\frac{3}{8}$ trapecijos ploto. Koks trapecijos pagrindų santykis ?

Atsakymas. 3.

224.Apie apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios ilgesnysis pagrindas lygus 20. Raskite trapecijos mažesnįjį pagrindą, kai apskritimo spindulys lygus 5.

Atsakymas. 5 .

225.Apie 15 cm ilgio skersmens apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios šoninė kraštinė lygi 17 cm. Rasti trapecijos pagrindus. **Atsakymas.** 25 ir 9.

226.Apie skritulį apibrėžtos lygiašonės trapecijos plotas lygus S. Raskite trapecijos šoninę kraštinę, jei jos smailusis kampas prie pagrindo lygus 30^0. **Atsakymas.** $\sqrt{2S}$.

227.Į lygiašonę trapeciją įbrėžtas skritulys. Lietimosi taškas šoninę kraštinę dalija į dvi atkarpas, kurių ilgiai m ir n . Raskite trapecijos plotą. **Atsakymas.** $2(m+n)\sqrt{mn}$.

228.Į lygiašonę trapeciją, kurios pagrindų ilgiai lygūs a ir b , įbrėžtas skritulys. Raskite skritulio plotą. **Atsakymas.** $\frac{\pi}{4}ab$.

229.Į lygiašonę trapeciją, kurios pagrindų ilgiai lygūs a ir b, įbrėžtas apskritimas. Raskite trapecijos įstrižainės ilgį. **Atsakymas.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+6ab}$.

230.Į lygiašonę trapeciją, kurios smailusis kampas prie pagrindo lygus α, įbrėžtas spindulio R apskritimas. Raskite trapecijos perimetrą. **Atsakymas.** $\frac{8R}{\sin\alpha}$.

231.Apie apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios smailusis kampas prie pagrindo lygus α. Apie šią trapeciją apibrėžtas apskritimas. Raskite apskritimų spindulių santykį.

Atsakymas. $\frac{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$.

STAČIOJI TRAPECIJA

232.Stačiosios trapecijos aukštinė lygi 8, o plotas lygus 96. Raskite trapecijos perimetrą, kai pagrindų ilgių skirtumas lygus 6. **Atsakymas.** 42 .

233.Raskite į stačiąją trapeciją įbrėžto apskritimo spindulį, jeigu šoninės kraštinės, nestatmenos pagrindams, ilgis lygus 13 cm, o pagrindų ilgių skirtumas lygus 12 cm.

Atsakymas. 2,5 cm .

234.Stačiosios trapecijos įstrižainė lygi jos šoninei kraštinei. Raskite jos šoninę kraštinę, jei aukštinė lygi 3, o vidurinė linija lygi $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **Atsakymas.** 6 .

235.Stačiosios trapecijos įstrižainė lygi jos šoninei kraštinei. Raskite trapecijos vidurinę liniją, jei jos aukštinė lygi 2 cm, o šoninė kraštinė lygi 4 cm. **Atsakymas.** $3\sqrt{3}$.

236.Stačiosios trapecijos pagrindai lygūs 18 ir 26. Raskite trapecijos plotą, kai jos įstrižainė statmena šoninei kraštinei. **Atsakymas.** 264 .

237.Stačiosios trapecijos didesniojo pagrindo ilgis lygus 15, pasvirosios šoninės kraštinės - 10, o smailiojo kampo kosinusas 0,8. Raskite trapecijos plotą. **Atsakymas.** 66.

238.Į stačiąją trapeciją įbrėžto apskritimo centras nutolęs nuo šoninės kraštinės galų per 3 cm ir 9 cm. Apskaičiuokite trapecijos kraštines.

Atsakymas. $\frac{36}{\sqrt{10}}$ cm, $\frac{12}{\sqrt{10}}$ cm, $\frac{18}{\sqrt{10}}$ cm, $\frac{3}{\sqrt{10}}$ cm .

239.Stačiosios trapecijos ABCD kampai A ir D statūs, kraštinė AB lygiagreti kraštinei CD, AB=1 , CD=4 , AD=5.Kraštinėje AD pažymėtas taškas M taip, kad kampas CMD yra dvigubai didesnis už kampą BMA. Kokiu santykiu taškas M dalija kraštinę AD ?

Atsakymas. $\frac{AM}{MD}=\frac{2}{3}$.

240.Stačiosios trapecijos pagrindai 16 ir 25, o jos trumpesnioji įstrižainė statmena šoninei kraštinei. Rasti trumpesniąją įstrižainę. **Atsakymas.** 20 .

241.Raskite stačiosios trapecijos, kurios pagrindai lygūs 7 cm ir 3 cm, o smailusis kampas lygus 60^0, plotą. **Atsakymas.** $20\sqrt{3}$ cm^2 .

242.Į stačiąją trapeciją įbrėžto apskritimo centras nutolęs nuo šoninės kraštinės galų 12 cm ir 9 cm atstumais. Raskite trapecijos vidurinę liniją. **Atsakymas.** 14,7 .

243.Stačiosios trapecijos vidurinė linija 12, o jos plotas lygus 96. Raskite trapecijos perimetrą, kai trapecijos pagrindų skirtumas lygus 6. **Atsakymas.** 42 .

244.Į stačiąją trapeciją įbrėžtas skritulys, kurio spindulys lygus 2,5. Pagrindams nestatmenos kraštinės ilgis 13. Raskite trapecijos plotą. **Atsakymas.** 45.

245.Stačiosios trapecijos šoninė kraštinė yra statmena pagrindams, o jos ilgis yra du kartus didesnis už mažesniojo trapecijos pagrindo ilgį, lygų *a*. Trapecijos įstrižainės statmenos viena kitai. Raskite atstumą tarp trapecijos įstrižainių vidurio taškų.

Atsakymas. 1,5 *a* .

246.Apie skritulį, kurio spindulys r, apibrėžta stačioji trapecija. Rasti jos plotą, kai mažesnysis pagrindas yra $\frac{3r}{2}$. **Atsakymas.** 4,5 r^2 .

247.Stačiosios trapecijos šoninė kraštinė lygi mažesniajam pagrindui ir sudaro su juo 120^0 kampą. Raskite trapecijos plotą, jei didesnysis pagrindas lygus $3\sqrt{3}$.

Atsakymas. $7{,}5\sqrt{3}$.

248.Stačiosios trapecijos plotas lygus S,o smailusis kampas lygus α. Raskite trapecijos aukštinę, jei jos trumpesnioji įstrižainė lygi ilgesniajam pagrindui.

Atsakymas. $\sqrt{2S\mathrm{ctg}\alpha}$.

249.Į stačiąją trapeciją (viena šoninė kraštinė statmena pagrindams), kurios pagrindų ilgiai 24 cm, 8 cm, o aukštinės ilgis 12 cm, įbrėžtas didžiausio ploto stačiakampis (dvi stačiakampio viršūnės yra šoninėse trapecijos kraštinėse, o kitos dvi - didžiajame pagrinde). Raskite tokio stačiakampio plotą. **Atsakymas.** 108 cm^2.

STEREOMETRIJA

1. PRIZMĖ

250.Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižainė lygi 5 ir su pagrindo plokštuma sudaro $22^0 30^l$ kampą. Raskite prizmės šoninio paviršiaus plotą. **Atsakymas.** 25 .

251.Stačiosios prizmės pagrindas yra lygiašonis trikampis, kurio pagrindas lygus a, o kampas prie jo lygus 45^0. Rasti prizmės tūrį, jei jos šoninio paviršiaus plotas lygus pagrindų plotų sumai. **Atsakymas.** $\frac{a^3}{8}(\sqrt{2}-1)$.

252.Taisyklingosios trikampės prizmės tūris lygus $12\sqrt{3}$, o šoninio paviršiaus plotas lygus 6. Raskite prizmės pagrindo kraštinės ilgį. **Atsakymas.** 24 .

253.Taisyklingosios keturkampės prizmės pagrindo kraštinė lygi 3. Raskite prizmės tūrį, kai kampo tarp prizmės įstrižainės ir šoninės sienos kotangentas lygus $\sqrt{2}$.

Atsakymas. 27

254.Taisyklingosios šešiakampės prizmės didžiausios įstrižainės ilgis lygus 8 ir jos sudaromo kampo su šonine briauna didumas yra 30^0. Raskite prizmės tūrį.

Atsakymas. 72.

255.Stačiosios prizmės pagrindas yra trapecija, kurios trys kraštinės lygios ir kiekvienos jų ilgis 2, o ketvirtosios ilgis 4. Raskite prizmės įstrižaininio pjūvio plotą, kai prizmės briaunos ilgis $4\sqrt{3}$. **Atsakymas.** 24 .

256.Taisyklingosios keturkampės prizmės pagrindo plotas lygus 7, o šoninės sienos įstrižainė su pagrindu sudaro kampą α. Raskite prizmės įstrižainės ilgį, kai $\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{5}$.

Atsakymas. 7.

257.Taisyklingosios šešiakampės prizmės visų briaunų ilgiai lygūs 1. Raskite pjūvio, einančio per pagrindo kraštinę ir ilgesniąją prizmės įstrižainę, plotą. **Atsakymas.** 3.

258.Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižaininio pjūvio plotas lygus S, o šoninės sienos įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite prizmės tūrį.

Atsakymas. $\frac{S}{2}\sqrt{\sqrt{2}\,S\,\mathrm{ctg}\alpha}$.

259.Taisyklingos keturkampės prizmės įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro kampą α, o jos šoninio paviršiaus plotas lygus S. Raskite prizmės tūrį. **Atsakymas.** $\frac{S\sqrt{S\,\mathrm{ctg}\,\alpha}}{8\sqrt[4]{2}}$.

260.Taisyklingosios trikampės prizmės tūris lygus V, o pagridų plotų suma lygi šoninio paviršiaus plotui. Raskite prizmės paviršiaus plotą. **Atsakymas.** $4\sqrt[6]{27V^4}$.

261.Taisyklingosios trikampės prizmės tūris lygus V. Kokia turi būti pagrindo kraštinė, kad visas prizmės paviršius būtų mažiausias ? **Atsakymas.** $\sqrt[3]{4V}$.

262.Per taisyklingosios trikampės prizmės apatinio pagrindo kraštinę ir priešais ją esančią viršutinio pagrindo viršūnę nubrėžta plokštuma. Su apatinio pagrindo plokštuma ji sudaro 45^0 kampą. Pjūvio plotas lygus S. Raskite prizmės tūrį. **Atsakymas.** $\frac{S\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{6}}{2}$.

263.Duota stačioji trikampė prizmė $ABCA_1B_1C_1$ (AA_1 , BB_1 , CC_1 - šoninės briaunos), kurioje $AC=6$, $AA_1=8$. Per viršūnę A išvesta plokštuma, kertanti briaunas BB_1 ir CC_1 atitinkamai taškuose M ir N. Raskite , kokiu santykiu ši plokštuma dalo prizmės tūrį, jeigu žinoma, kad $BM=MB_1$, o AN yra kampo CAC_1 pusiaukampinė.

Atsakymas. 7 : 17 .

264.Pasvirosios prizmės pagrindas - taisyklingasis trikampis, kurio kraštinė a. Šoninės briaunos ilgis b, o viena jų su prie pagrindo esančiomis kraštinėmis sudaro 45^0 kampus. Raskite šoninį prizmės paviršių. **Atsakymas.** $ab(\sqrt{2}+1)$.

265.Atstumas tarp pasvirosios trikampės prizmės bet kurių dviejų šoninių briaunų lygus a. Šoninė briauna lygi ℓ ir pasvirusi į pagrindo plokštumą 60^0 kampu. Raskite prizmės paviršių. **Atsakymas.** $3a\ell+a^2\sqrt{3}$.

266.Stačiosios prizmės pagrindas - statusis trikampis, kurio įžambinė c ir smailusis kampas 30^0. Per apatinio pagrindo įžambinę ir viršutinio pagrindo stačiojo kampo viršūnę nubrėžta plokštuma. Su pagrindo plokštuma ji sudaro 45^0 kampą. Raskite trikampės piramidės, kurią plokštuma nukerta nuo prizmės, tūrį. **Atsakymas.** $\frac{c^3}{32}$.

267.Trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ taškai M , N ir P yra atitinkamai pagrindo ABC kraštinių AB , BC ir CA vidurio taškai. Atkarpos MC_1 , NA_1 , PB_1 yra poromis statmenos viena kitai, o kiekvienos jų ilgis lygus a. Raskite prizmės tūrį.

Atsakymas. $\frac{2}{9}a^3$.

268.Taisyklingosios keturkampės prizmės $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pagrindo kraštinės ilgis lygus a. Per tašką C_1 nubrėžta tiesė, statmena plokštumai BA_1D. Raskite šios tiesės atkarpos, esančios prizmės viduje, ilgį, jeigu šoninės briaunos ilgis lygus $a\sqrt{2}$.

Atsakymas. $\frac{1}{2}\sqrt{10}a$.

2. GRETASIENIS

269.Stačiojo gretasienio pagrindas yra rombas, kurio vienos įstrižainės ilgis lygus 16, o kraštinės ilgis 10. Gretasienio trumpesniosios įstrižainės su pagrindo plokštuma sudaromo kampo sinusas lygus 0,6. Raskite gretasienio tūrį. **Atsakymas.** 864.

270.Stačiojo gretasienio šoninė briauna lygi 10, o pagrindo kraštinės lygios 11 ir 23. Raskite gretasienio mažesniojo įstrižaininio pjūvio plotą, kai jo pagrindo įstrižainės santykiuoja kaip 2 : 3 . **Atsakymas.** 200.

271.Stačiojo gretasienio pagrindas - lygiagretainis, kurio vienas kampas lygus 30^0. Pagrindo plotas 4 dm^2. Gretasienio šoninių briaunų plotai 6 dm^2 ir 12 dm^2. Apskaičiuokite gretasienio tūrį. **Atsakymas.** 12 dm^3 .

272.Stačiakampio gretasienio įstrižainė lygi 34 ir sudaro su pagrindo plokštuma 60^0 kampą, o trumpesnioji pagrindo kraštinė lygi 8. Raskite gretasienio pagrindo plotą.

Atsakymas. 120.

273.Stačiakampio gretasienio šoninės sienos įstrižainė lygi 13, o tos sienos pagrindo kraštinė lygi 12. Rasti kitos pagrindo kraštinės ilgį, kai gretasienio tūris lygus 120.

Atsakymas. 2 .

274.Stačiojo gretasienio pagrindas yra rombas, kurio trumpesniosios įstrižainės ilgis 6, gretasienio trumpesniosios įstrižainės ilgis 10, o šoninio paviršiaus plotas $32\sqrt{29}$. Raskite ilgesniosios gretasienio įstrižainės ilgį. **Atsakymas.** 12 .

275.Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės, kurių ilgiai lygūs 4 ir 3, sudaro 60^0 kampą. Šoninė briauna lygi pagrindo kraštinių geometriniam vidurkiui. Raskite gretasienio didesniosios įstrižainės ilgį. **Atsakymas.** 7 .

276.Stačiojo gretasienio pagrindas yra lygiagretainis, kurio kraštinės lygios 1 ir 2, o smailusis kampas 60^0. Rasti ilgesniąją gretasienio įstrižainę, kai jo aukštinė lygi 3.

Atsakymas. 4 .

277.Stačiojo gretasienio briaunos, išeinančios iš vienos viršūnės, lygios 1 , 2 ir 3, o dvi mažesniosios briaunos sudaro 60^0 kampą. Raskite didesniosios gretasienio įstrižainės ilgį. **Atsakymas.** 4 .

278.Stačiojo gretasienio pagrindas yra rombas, kurio įstrižainės lygios 16 ir 12, o tūris lygus 576. Raskite gretasienio šoninio paviršiaus plotą. **Atsakymas.** 240 .

279.Stačiojo gretasienio įstrižainės lygios 9 cm ir $\sqrt{33}$ cm, pagrindo perimetras lygus 18 cm, šoninė briauna lygi 4 cm. Apskaičiuokite gretasienio tūrį. **Atsakymas** 64 cm^3 .

280.Stačiakampio gretasienio įstrižainė 13 cm, o jo šoninių sienų įstrižainės lygios $4\sqrt{10}$ cm ir $3\sqrt{17}$ cm. Apskaičiuokite gretasienio tūrį. **Atsakymas.** 144 cm^3 .

281.Stačiojo gretasienio pagrindas yra rombas. Pagrindo įstrižainių ilgiai yra 8 ir $2\sqrt{23}$, o šoninės sienos įstrižainės ilgis lygus 12. Raskite trumpesniosios gretasienio įstrižainės ilgį. **Atsakymas.** 13.

282.Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinių ilgiai lygūs 4 ir 6, o smailusis kampas tarp jų lygus 30^0. Ilgesnioji pagrindo įstrižainė lygi trumpesniajai gretasienio įstrižainei. Apskaičiuokite gretasienio tūrį. **Atsakymas.** $48\sqrt[4]{27}$.

283.Stačiakampio gretasienio matmenys 2 cm, 3 cm ir 6 cm. Kubo ir šio gretasienio tūrių santykis lygus jų paviršiaus plotų santykiui. Rasti kubo briaunos ilgį.

Atsakymas. 3 cm .

284.Per stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ viršūnes A , C ir D_1 nubrėžta plokštuma sudaro 60^0 dvisienį kampą. Pagrindo kraštinės lygios 4 cm ir 3 cm. Rasti gretasienio tūrį. **Atsakymas.** $\frac{144\sqrt{3}}{5}$ cm^3 .

285.Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės lygios a ir b, smailusis kampas tarp jų 60^0. Pagrindo ilgesnioji įstrižainė lygi trumpesniajai gretasienio įstrižainei. Raskite gretasienio tūrį. **Atsakymas.** $\frac{ab\sqrt{6ab}}{2}$.

3. KUBAS

286.Raskite smailųjį kampą tarp kubo įstrižainių. **Atsakymas.** $\arccos\frac{1}{3}$.

287.Kubo viso paviršiaus plotas lygus 36 cm^2. Raskite atstumą tarp dviejų prasilenkiančių jo briaunų vidurio taškų. **Atsakymas** . 3 cm .

288.Kubo briaunų, išeinančių iš vienos viršūnės, galai sujungti tiesių atkarpomis. Gautojo trikampio plotas lygus $8\sqrt{3}$. Raskite kubo tūrį. **Atsakymas.** 64 .

289.Kubo viršutinio pagrindo centras sujungtas su apatinio pagrindo kraštinių vidurio taškais. Rasti gautos piramidės šoninį paviršių, kai kubo briauna lygi 2. **Atsakymas.** 6.

290.Kubo, kurio briauna a, viršutinės sienos centras sujungtas su pagrindo viršūnėmis. Raskite gautos piramidės visą paviršių. **Atsakymas.** $a^2(\sqrt{5}+1)$.

291.Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kurio briauna lygi a. Per jo sienos ABCD istrižainę AC nubrėžta plokštuma, lygiagreti tiesei BO_1 : čia O_1 - sienos $A_1B_1C_1D_1$ centras. Raskite gauto pjūvio plotą. **Atsakymas.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

4. PIRAMIDĖ

292.Piramidės pagrindas - statusis trikampis, kurio statiniai lygūs 7 ir 24. Piramidės sienos, einančios per šio trikampio statinius, yra statmenos pagrindo plokštumai, o trečioji siena su pagrindu sudaro 60^0 kampą. Raskite piramidės aukštinę. **Atsakymas.** $6{,}72\sqrt{3}$.

293.Piramidės pagrindas yra lygiašonis trikampis, kurio šoninės kraštinės lygios 6, o pagrindas 8. Apskaičiuokite piramidės tūrį, kai visos šoninės briaunos lygios 9.

Atsakymas. 48 .

294.Piramidės SABC pagrindas yra lygiakraštis trikampis ABC kurio kraštinės ilgis lygus a. Siena SAB statmena pagrindo plokštumai, o sienų SAC ir SBC aukštinių, išvestų iš viršūnės S, ilgiai atitinkamai lygūs $\sqrt{5}a$ ir $\sqrt{2}a$. Raskite piramidės aukštinę.

Atsakymas. $\frac{\sqrt{5}}{4}a$.

295.Piramidės pagrindas - lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė a. Viena jos šoninė siena - taip pat lygiakraštis trikampis, ji statmena pagrindo plokštumai. Raskite piramidės viso paviršiaus plotą. **Atsakymas.** $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{5})}{4}$.

296.Piramidės pagrindas - lygiašonis trikampis, kurio kraštinių ilgiai 12 , 10 ir 10. Šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro 45^0 kampą. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

Atsakymas. 48.

297.Trikampės piramidės šoninės briaunos yra vienodo ilgio ir lygios a. Iš trijų plokščiųjų viršūnės kampų, kuriuos sudaro tos briaunos, du lygūs 45^0, o trečias - 60^0. Raskite piramidės tūrį. **Atsakymas.** $\frac{a^3}{12}$.

298.Piramidės aukštinė lygi 16, o jos pagrindo plotas lygus 512. Kokiu atstumu nuo pagrindo yra piramidės pjūvis, lygiagretus pagrindui, kai jo plotas 50 ?

Atsakymas. 11.

299.Piramidės pagrindas yra stačiakampis, kurio kraštinės lygios 6 ir 8. Apskaičiuokite piramidės tūrį, kai visos šoninės briaunos lygios 13. **Atsakymas.** 192 .

300.Piramidės pagrindas - stačiakampis, kurio kraštinės 6 cm ir 15 cm. Šoninės briaunos yra vienodo ilgio, o piramidės aukštinė lygi 4 cm. Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą. **Atsakymas.** $126\ cm^2$.

301.Piramidės pagrindas yra stačiakampis, kurio kraštinės 5 cm ir 9 cm. Viena iš šoninių briaunų statmena pagrindo plokštumai, jos ilgis 12 cm . Apskaičiuokite viso piramidės paviršiaus plotą. **Atsakymas.** $225\ cm^2$.

Nurodymas. Visos keturios duotosios piramidės šoninės sienos yra statieji trikampiai, o jų plotai lygūs statinių sandaugos pusei.

302.Piramidės pagrindas - stačiakampis, kurio plotas S. Dvi šoninės sienos statmenos pagrindo plokštumai, o kitos dvi pasvirusios į ją 30^0 ir 60^0 kampais. Raskite piramidės tūrį. **Atsakymas.** $\frac{S\sqrt{S}}{3}$.

303.Keturkampės piramidės pagrindas - stačiakampis, kurio plotas S; šoninės jo briaunos lygios ir sudaro su pagrindo plokštuma 45^0 kampą. Kampas tarp pagrindo įsrižainių lygus 60^0. Raskite piramidės tūrį. Atsakymas. $\frac{S\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{27}}{9}$.

304.Piramidės pagrindas - lygiašonis trikampis, kurio kraštinės 40 cm , 25 cm ir 25 cm . Piramidės aukštinė eina per kampo, esančio prieš 40 cm kraštinę, viršūnę ir lygi 8 cm. Apskaičiuokite piramidės šoninį paviršių.

Atsakymas. $540\ cm^2$.

305.Piramidės pagrindas lygiagretainis, kurio kraštinių ilgiai 3 ir 7, o viena jo įstrižainė lygi 6. Piramidės aukštinė eina per pagrindo įstrižainių susikirtimo tašką ir jos ilgis 4. Raskite piramidės šoninių briaunų ilgių sumą. **Atsakymas.** 22 .

306.Keturkampės piramidės SABCD pagrindas yra lygiagretainis ABCD. Per briauną AB ir briaunos SC vidurio tašką M išvesta plokštuma. Gautasis pjūvis dalo pagrindą į dvi dalis. Raskite šių dalių tūrių santykį. **Atsakymas.** 3 : 5 .

307.Piramidės pagrindas yra kvadratas. Viena piramidės briauna statmena pagrindui. Ilgiausioji briauna lygi 6 cm ir su pagrindu sudaro 45^0 kampą. Raskite pagrindo plotą.

Atsakymas. $9\ cm^2$.

308.Piramidės pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė lygi 3. Dvi šoninės sienos yra statmenos į pagrindą, o kitos dvi su pagrindu sudaro kampą α. Raskite piramidės paviršiaus plotą, kai $\sin\alpha=0,6$. **Atsakymas.** 27 .

309.Piramidės pagrindas kvadratas, jos aukštinė eina per vieną pagrindo viršūnių ; piramidės pagrindo kraštinė lygi 20, o aukštinė 21. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą. **Atsakymas.** 1000 .

310.Piramidės pagrindas yra rombas, kurio smailusis kampas lygus 60^0, o rombo kraštinės ilgis $8\sqrt{3}$. Piramidės aukštinė eina per rombo centrą, o trumpiausios šoninės briaunos ilgis lygus $5\sqrt{3}$. Raskite piramidės tūrį. **Atsakymas.** 288 .

311.Piramidės pagrindas - rombas, kurio kraštinė lygi 15, o didesniosios įstrižainės ilgis lygus 24. Piramidės šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro 45^0 kampą. Raskite piramidės tūrį. **Atsakymas.** 518,4 .

312.Piramidės pagrindas - rombas, kurio įstrižainės 6 m ir 8 m ; piramidės aukštinė eina per įstrižainių susikirtimo tašką ir lygi 1 m. Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

Atsakymas. $26\ m^2$.

313.Piramidės SABCD pagrindas yra rombas, kurio kraštinė lygi a, o smailusis kampas lygus α. Piramidės aukštinė eina per rombo ABCD centrą. Sienų SAB ir SCD plokštumos statmenos viena kitai. Raskite piramidės tūrį.

Atsakymas. $\frac{1}{6}a^3\sin^2\alpha$.

314.Taisyklingojo tetraedro (visos briaunos lygios) tūris lygus V. Raskite jo aukštinės ilgį.

Atsakymas. $\sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{2}}}$.

315.Taisyklingosios trikampės piramidės plokščiasis kampas prie viršūnės lygus 60^0, o apskritimo, apibrėžto apie šoninę sieną, sindulys R. Raskite piramidės tūrį.

Atsakymas. $\frac{R^3}{4}\sqrt{6}$.

316.Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo perimetras lygus $30\sqrt{3}$, o šoninės briaunos ilgis $2\sqrt{133}$. Raskite piramidės tūrį. **Atsakymas.** 900 .

317.Tiesės atkarpos, jungiančios taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo centrą su šoninės briaunos viduriu, ilgis lygus pagrindo kraštinės ilgiui. Raskite šoninių sienų sudaromo dvisienio kampo kosinusą. **Atsakymas.** $\frac{7}{15}$.

318.Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi 10. Rasti piramidės aukštinę, kai jos šoninio paviršiaus plotas du kartus didesnis už pagrindo plotą.

Atsakymas. 5 .

319.Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė lygi 1, o jos pagrindo kraštinė lygi 6. Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą. **Atsakymas.** 18 .

320.Taisyklingosios trikampės prizmės šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro 30^0 kampą ir jos atstumas iki priešingos pagrindo kraštinės vidurio lygus 6. Raskite piramidės tūrį. **Atsakymas.** 128 .

321.Piramidės pagrindas - taisyklingas trikampis su kraštine a. Viena šoninė briauna statmena į pagrindą, o kitos dvi sudaro su pagrindu kampą α. Raskite piramidės tūrį.

Atsakymas. $\frac{a^3\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha}{12}$.

322.Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro 30^0 kampą, o apie pagrindą apibrėžto apskritimo spindulys lygus 2. Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą. **Atsakymas.** 6 .

323.Taisyklingąją trikampę piramidę kerta plokštuma, kuri statmena pagrindui ir dalija dvi jo kraštines pusiau. Duotosios piramidės pagrindo kraštinė lygi a, o dvisienis kampas prie pagrindo 45^0. Raskite nukirstos piramidės tūrį. **Atsakymas.** $\frac{a^3}{128}$.

324.Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinės ilgis lygus a, šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite piramidės tūrį.

Atsakymas. $\frac{a^3\mathrm{tg}\alpha}{12}$.

325.Taisyklingosios trikampės piramidės plokščiasis kampas prie viršūnės lygus α. Raskite piramidės šoninio paviršiaus ir pagrindo plotų santykį.

Atsakymas. $\sqrt{3}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

326.Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a ir su šonine briauna sudaro kampą α. Raskite plotą pjūvio, nubrėžto per piramidės šoninę briauną ir aukštinę. **Atsakymas.** $\frac{a^2}{4}\mathrm{tg}\alpha$.

327.Taisyklingosios trikampės piramidės tūris V, o kampas tarp aukštinės ir šoninės briaunos lygus α. Kam lygi aukštinė . **Atsakymas.** $\sqrt[3]{\frac{4\sqrt{3}V}{3\mathrm{tg}\alpha}}$.

328.Taisyklingosios keturkampės piramidės plokščiasis kampas prie viršūnės lygus 60^0, o į šoninę sieną įbrėžto apskritimo spindulys r. Raskite piramidės tūrį.

Atsakymas. $4r^3\sqrt{6}$.

329.Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo įstrižainių ir šoninių briaunų ilgiai lygūs $\sqrt{3}$. Raskite piramidės tūrį. **Atsakymas.** 0,75 .

330.Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo plotas lygus 9, o plokščias kampas prie pagrindo α. Raskite piramidės tūrį, kai $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$. **Atsakymas.** 18 .

331.Taisyklingosios keturkampės piramidės aukštinė lygi 2, o šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaromo kampo tangentas lygus $\frac{4}{3}$. Raskite piramidės pilną paviršių.

Atsakymas. 24 .

332.Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna , kurios ilgis lygus ℓ, sudaro su pagrindu kampą α. Apskaičiuokite piramidės tūrį. **Atsakymas.** $\frac{1}{3}\ell^3\sin 2\alpha\cos\alpha$.

333.Apskaičiuokite taisyklingosios keturkampės piramidės tūrį, jei jos viso paviršiaus plotas lygus 1440 dm^2, o aukštinės ir pagrindo kraštinės ilgiai sutinka kaip 6 : 5 .

Atsakymas. 3200 dm^3 .

334.Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus 14,76, o pilno paviršiaus plotas lygus 18. Raskite piramidės tūrį. **Atsakymas.** 4,32 .

335.Taisyklingosios keturkampės piramidės SABCD pagrindo kraštinė lygi 2, aukštinė - $\sqrt{2}$. Raskite atstumą tarp šoninės briaunos SA ir pagrindo įstrižainės BD.

Atsakymas. 1.

336.Raskite taisyklingosios keturkamės piramidės tūrį, jei jos šoninė briauna lygi a, o įstrižainės pjūvis ir piramidės pagrindas yra lygiapločiai. **Atsakymas.** $\frac{4a^3}{15\sqrt{5}}$.

337.Taisyklingosios keturkampės piramidės viršūnės plokščias kampas α, pagrindo briauna lygi a. Per pagrindo įstrižainę nubrėžta plokštuma, statmena į šoninę briauną, esančią prieš tą įstrižainę. Raskite gautojo pjūvio plotą. **Atsakymas.** $\frac{1}{2}a^2\cos\alpha$.

338.Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo įstrižainė ir dvi šoninės briaunos sudaro lygiakraštį trikampį. Raskite piramidės tūrį, jei jos šoninės sienos plotas lygus S.

Atsakymas. $\frac{4S}{3}\sqrt{\frac{6S\sqrt{7}}{49}}$.

339.Taisyklingosios keturkampės piramidės SABCD šoninė briauna SB su pagrindo plokštuma sudaro 45^0 kampą. Kokį kampą ši briauna sudaro su plokštuma SCD ?

Atsakymas. $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

340.Taisyklingosios šešiakampės piramidės pagrindo plotas lygus $24\sqrt{3}$, o šoninio paviršiaus plotas 72. Raskite šoninės sienos aukštinės ilgį. **Atsakymas.** 6.

341.Taisyklingoje šešiakampėje piramidėje per pagrindo centrą išvestas pjūvis, lygiagretus vienai šoninei sienai. Raskite pjūvio ploto ir šoninės sienos ploto santykį.

Atsakymas. 5 : 4 .

342.Taisyklingosios šešiakampės piramidės tūris lygus $24\sqrt{3}$, o jos pagrindo plotas lygus $24\sqrt{3}$. Raskite piramidės šoninės briaunos ilgį. **Atsakymas.** 5 .

5. RITINYS

343.Ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus 56, o ašinio pjūvio įstrižainės su pagrindu sudaromo kampo tangentas lygus 2. Raskite ritinio pagrindo plotą. **Atsakymas.** 7.

344.Ritinio šoninis paviršius du kartus didesnis už jo pagrindų plotų sumą. Raskite kampą tarp ašinio pjūvio įstrižainės ir pagrindo plokštumos. **Atsakymas.** 45 .

345.Metalinis ritinys, kurio pagrindo spindulys 6 cm, o aukštinė 8 cm, perlydytas į rutulį. Koks gautojo rutulio spindulys ? **Atsakymas.** 6 cm .

346.Ritinio pagrindo plotas lygus šoninio paviršiaus plotui, o ašinio pjūvio įstrižainės ilgis lygus $2\sqrt{17}$. Raskite pagrindo spindulio ilgį. **Atsakymas.** 4 .

347.Ritinio tūris lygus 45π, o šoninio paviršiaus plotas lygus 12π. Raskite ritinio pagrindo spindulio ilgį. **Atsakymas.** 7,5.

348.Ritinio tūris lygus $\frac{12}{\pi}$, o pagrindo plotas $\frac{4}{\pi}$. Raskite ritinio šoninio paviršiaus išklotinės įstrižainės ilgį. **Atsakymas.** 5 .

349.Ritinio aukštinė 10 ilgesnė už pagrindo spindulį, o visas ritinio paviršius lygus 144π. Raskite ritinio aukštinę. **Atsakymas.** 14 .

350.Ritinio aukštinė lygi $12\sqrt{\pi}$, o šoninio paviršiaus išklotinės įstrižainė su jos pagrindu sudaro 45^0 kampą. Rasti ritinio pagrindo plotą. **Atsakymas.** 36 .

351.Ritinio ašinio pjūvio plotas lygus $36\sqrt{3}\pi$, o šononio paviriaus išklotinės įstrižainė su jos pagrindu sudaro 60^0 kampą. Apskaičiuokite ritinio pagrindo spindulio ilgį.

Atsakymas. 3 .

352.Ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus S, o pagrindo plotas Q. Raskite ritinio tūrį.

Atsakymas. $\frac{S\sqrt{\pi Q}}{2\pi}$.

353.Ritinio ašinio pjūvio įstrižainė, kurios ilgis lygus d, su pagrindo plokštųma sudro kampą α. Raskite ritinio šoninio paviršiaus plotą ir tūrį.

Atsakymas. $\frac{1}{2}\pi d^2\sin 2\alpha$; $\frac{1}{4}\pi d^3\cos^2\alpha\sin\alpha$.

354.Atviras rezervuaras, kurio tūris V, yra ritinio formos. Koks turėtų būti pagrindo spindulys ir aukštis, kad rezervuaro paviršius būtų mažiausias ?

Atsakymas. $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

6. KŪGIS

355.Kūgio tūris lygus 40π, o kampo tarp sudaromosios ir aukštinės kosinusas lygus $\frac{5}{7}$. Raskite kūgio sudaromosios ilgį. **Atsakymas.** 7 .

356.Kūgio šoninis paviršius lygus 30π, o kampo tarp sudaromosios ir pagrindo tangentas lygus $\frac{3}{4}$. Raskite kūgio aukštinę. **Atsakymas.** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

357.Raskite kūgio tūrį, kai jo šoninio paviršiaus plotas lygus 18, o atstumas nuo pagrindo centro iki sudaromosios lygus 6. **Atsakymas.** 36.

358.Kūgio pagrindo ir ašinio pjūvio plotų santykis lygus π. Kokį kampą sudaro kūgio sudaromoji su pagrindo plokštuma ? **Atsakymas.** 45^0.

359.Kūgio tūris lygus 240π, o jo sudaromosios ir pagrindo plokštumos sudaromo kampo tangentas lygus $\frac{5}{12}$. Raskite kūgio ašinio pjūvio plotą. **Atsakymas.** 60.

360.Kūgio tūris lygus 100π, o jo pagrindo spindulys lygus 5. Rasti kūgio ašinio pjūvio perimetrą. **Atsakymas.** 36.

361.Apskaičiuokite kūgio paviršių, jei kūgio tūris lygus 324π cm^2, o aukštinės ir pagrindo skersmens ilgiai sutinka kaip 2 : 3. **Atsakymas** 216π cm^2.

362.Apskaičiuokite kūgio tūrį, jeigu jo pagrindo skersmuo lygus 10 cm, o aukštinė lygi pagrindo spindulio kvadratui. **Atsakymas.** $\frac{525}{3}\pi$.

363.Kūgio aukštinė lygi 15, o kampas tarp aukštinės ir sudaromosios lygus 60^0. Per dvi sudaromąsias, kurios sudaro 30^0 kampą, išvesta plokštuma. Raskite pjūvio plotą.
Atsakymas. 225.

364.Kūgio pagrindo spindulys lygus $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$. Per aukštinės vidurį nubrėžta plokštuma, lygiagreti su pagrindo plokštuma. Raskite pjūvio plotą. **Atsakymas.** 6,25.

365.Kūgio tūris lygus 96π, o jo aukštinės ir sudaromosios santykis lygus 0,8. Raskite kūgio aukštinę. **Atsakymas.** 8.

366.Kūgio tūris lygus 240π, o ašinio pjūvio plotas lygus 60. Raskite kūgio sudaromosios ilgį.
Atsakymas. 13.

367.Kūgio ašinio pjūvio kampas prie viršūnės lygus 90^0, o jo plotas $9\sqrt[3]{\frac{4}{\pi^2}}$. Rasti kūgio tūrį.
Atsakymas. 18.

368.Kūgio šoninis paviršius yra du kartus didesnio už jo pagrindo plotą. Raskite kūgio išklotinės kampą. **Atsakymas.** π.

369.Kūgio aukštinė h. Jo šoninio paviršiaus išklotinė yra išpjova, kurios centrinis kampas 120^0. Apskaičiuokite kūgio tūrį. **Atsakymas.** $\frac{\pi h^3}{24}$.

370.Kūgio pagrindo skersmuo 10 cm, o aukštinė 4 cm. Raskite kūgio paviršių.
Atsakymas. $\left(\frac{5\sqrt{41}}{2}+10\right)\pi$.

371.Statmuo, nuleistas iš kūgio pagrindo centro į sudaromąją, yra sukamas apie kūgio ašį. Raskite kampo tarp kūgio sudaromosios ir aukštinės dydį, jeigu sukimosi paviršius dalija kūgio tūrį pusiau. **Atsakymas.** $\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

372.Metalinis kūgis, kurio pagrindo spindulys 16 cm, o aukštinė 8 cm, perlydytas į rutulį. Koks gautojo rutulio spindulys ? **Ataskymas.** 8 cm.

373.Per dvi kūgio sudaromąsias nubrėžta plokštuma, kuri su kūgio pagrindo plokštuma sudaro 75^0 kampą. Rasti pjūvio plotą, jeigu kūgio aukštinė lygi 4 cm, o kampas tarp sudaromųjų 60^0. **Atsakymas.** $\frac{16\sqrt{3}}{3\cos^2 25^0}$.

374.Kūgio sudaromoji lygi ℓ. Ašinio pjūvio kampas prie viršūnės lygus 2α. Raskite kūgio tūrį ir pilną paviršiaus plotą. **Atsakymas.** $\frac{\pi}{3}\ell^3\sin^2\alpha\cos\alpha$; $\pi\ell^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

375.Į kūgio pagrindą įbrėžtas kvadratas, kurio kraštinė a. Plokštuma, einanti per kūgio viršūnę ir kvadrato kraštinę, pjūvyje su kūgio paviršiumi sudaro trikampį, kurio kampas prie kūgio viršūnės lygus α. Raskite kūgio tūrį. **Atsakymas.** $\frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$.

376.Kūgio paviršiaus plotas lygus T, o šoninio paviršiaus plotas S. Raskite kūgio ašinio pjūvio kampą prie viršūnės. **Atsakymas.** $2\arcsin\frac{T-S}{S}$.

377.Kūgio ašinio pjūvio plotas lygus S, o pjūvio, išvesto per aukštinės vidurį ir lygiagretaus kūgio pagrindui, plotas lygus Q. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos. **Atsakymas.** $\operatorname{arctg}\frac{3\pi}{4Q}$.

378.Kūgio sudaromoji ℓ. Kokia turi būti kūgio aukštinė, kad jo tūris būtų didžiausias ?

Atsakymas. $\frac{\ell}{\sqrt{3}}$.

379.Kūgio aukštinės ir pagrindo spindulio suma lygi a. Kokia turi būti kūgio aukštinė, kad jo tūris būtų didžiausias ? **Atsakymas.** $\frac{a}{3}$.

380.Kūgio šoninis paviršius lygus $6\sqrt{2}$, o jo pagrindo plotas - $3\sqrt{6}$. Raskite kampą, kurį sudaro kūgio sudaromoji su pagrindo plokštuma. **Atsakymas.** 30^0.

7. RUTULYS

381.Rutulį, kurio spindulys $\frac{26}{\sqrt{\pi}}$, kerta plokštuma, nutolusi nuo rutulio centro atstumu $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$. Rasti pjūvio plotą. **Atsakymas.** 576.

382.Rutulio plotas lygus $\frac{1}{\pi}\sqrt{6\pi}$. Raskite rutulio paviršiaus plotą. **Atsakymas.** 6 .

383.Rutulį, kurio spindulys 15 cm, kerta dvi lygiagrečios plokštumos abiejose centro pusėse: viena 12 cm , o kita - 9 cm atstumu. Apskaičiuokite gautojo rutulio sluoksnio tūrį. Atsakymas. 3906 π cm^3 .

8. ĮBRĖŽTIEJI IR APIBRĖŽTIEJI BRIAUNAINIAI IR SUKINIAI.

384.Apskaičiuokite kubo ir į jį įbrėžto rutulio paviršių plotų santykį. Atsakymą užrašyti šį santykį padauginus iš π. **Atsakymas.** 6 .

385.Kūgio ašinis pjūvis yra lygiakraštis trikampis. Raskite kūgio ir į kūgį įbrėžto rutulio tūrių santykį. **Atsakymas.** 2,25 .

386.Apie kūgį apibrėžtas rutulys, kurio spindulys R. Raskite kūgio tūrį ir šoninį paviršių, jei kampas tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo lygus α.

Atsakymas. $V = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2\alpha \sin^2 2\alpha$; $S = 2\pi R^2 \sin\alpha \sin 2\alpha$.

387.Rutulio tūris lygus V. Į šį rutulį įbrėžtos taisyklingosios keturkampės piramidės priešingųjų šoninių briaunų sudarytas kampas lygus α. Raskite piramidės tūrį.

Atsakymas. $\frac{V}{2\pi}\sin^3\alpha \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

388.Rutulio spindulys lygus R. Į šį rutulį įbrėžtos taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite piramidės tūrį.

Atsakymas. $\frac{2}{3}R^3\sin^3 2\alpha \operatorname{tg}\alpha$.

389.Į rutulį įbrėžta taisyklingoji keturkampė piramidė, kurios tūris lygus V, o pagrindo plokštuma su šonine briauna sudaro kampą α. Raskite rutulio tūrį.

Atsakymas. $\frac{2\pi V}{\sin^3 2\alpha}\operatorname{ctg}\alpha$.

390.Į rutulį įbrėžta taisyklingoji keturkampė piramidė, kurios plokščias kampas prie viršūnės lygus α. Raskite piramidės tūrį, jeigu rutulio tūris lygus V.

Atsakymas. $\frac{2}{\pi}V\sin^2\alpha$.

391.Į rutulį įbrėžta piramidė, kurios pagrindas - trikampis. Jo kraštinės lygios 13 cm , 14 cm ir 15 cm. Piramidės viršūnė nutolusi nuo kiekvienos pagrindo kraštinės per 5 cm. Apskaičiuokite rutulio paviršiaus plotą. **Atsakymas.** $\frac{64\pi}{9}$ cm^2.

392.Apie rutulį, kurio tūris V, apibrėžta stačioji keturkampė prizmė. Prizmės pagrindas - rombas, kurio smailusis kampas α. Raskite piramidės tūrį, jei $\alpha=30^0$.

Atsakymas. $\frac{12V}{\pi}$

393.Apie rutulį apibrėžta taisyklingoji trikampė prizmė, o apie ją - rutulys. Raskite šių rutulių paviršių santykį. **Atsakymas.** 5 : 1 .

394.Į vienetinio spindulio rutulį įbrėžtas kūgis. Kūgio šoninio paviršiaus plotas 2 kartus didesnis už pagrindo plotą. Raskite kūgio tūrį. **Atsakymas.** $\frac{3}{8}\pi$.

395.Kūgio sudaromoji lygi ℓ, o pagrindo spindulys lygus r. Raskite apie tą kūgį apibrėžto rutulio paviršiaus plotą. Atsakymas. $\frac{\pi\ell^4}{\ell^2 - r^2}$.

396.Kampo tarp kūgio aukštinės ir sudaromosios dydis yra α . Raskite kūgio ir apie jį apibrėžto rutulio tūrių santykį. **Atsakymas.** $2\sin^2\alpha\cos^4\alpha$.

397.Apie kūgį, kurio aukštinė h ir pagrindo spindulys r, vienas rutulys apibrėžtas, o kitas rutulys į jį įbrėžtas. Raskite šių rutulių paviršiaus plotų santykį.

Atsakymas. $\frac{1}{4r^2h^2}\left(r^2+h^2\right)^2\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)^2$.

398.Į kūgį, kurio sudaromoji lygi pagrindo skersmeniui, įbrėžtas rutulys. Kūgio sudaromoji lygi a. Apskaičiuokite rutulio tūrį ir paviršiaus plotą. **Atsakymas.** $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{54}$; $\frac{\pi a^2}{3}$.

399.Į kūgį, kurio ašinio pjūvio viršūnės kampo dydis 2α, įbrėžtas rutulys. Raskite rutulio ir kūgio tūrių santykį. Atsakymas. $4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

400.Į kūgį įbrėžtas ritinys, kurio aukštinė lygi kūgio pagrindo spinduliui. Raskite kampą tarp kūgio ašies ir sudaromosios, jeigu ritinio paviršiaus plotas sutinka su kūgio pagrindo plotu kaip 3 : 2 . **Atsakymas.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

401.Kūgis ir ritinys turi bendrą pagrindą, o kūgio viršūnė yra ritinio kito pagrindo centras. Raskite kampą tarp kūgio ašies ir sudaromosios, jeigu ritinio paviršiaus plotas sutinka su kūgio viso paviršiaus plotu kaip 7 : 4 . Atsakymas. $\arcsin\frac{3}{5}$.

402.Kūgio aukštinė dukart ilgesnė už įbrėžto į tą kūgį ritinio aukštinę, o sudaromoji su pagrindu sudaro kampą α. Ritinio ašinio pjūvio plotas lygus S. Raskite kūgio tūrį.

Atsakymas. $\frac{2}{3}\pi S\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha}$.

403.Į rutulį įbrėžtas kūgis, kurio sudaromoji pasvirusi, į pagrindo plokštumą kampu α. Raskite kūgio tūrį, jeigu rutulio spindulys lygus R.

Atsakymas. $\frac{8}{3}\pi R^3\sin^4\alpha\cos^2\alpha$.

404.Į R spindulio rutulį įbrėžtas kūgis. Raskite kūgio šoninio paviršiaus plotą, jei kūgio aukštinė lygi h. **Atsakymas.** $\pi h\sqrt{(2R-h)\cdot 2R}$.

405.Į rutulį įbrėžta taisyklingoji keturkampė piramidė, kurios tūris lygus V, o šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą φ. Raskite rutulio tūrį.

Atsakymas. $\frac{\pi V}{\sin^2\varphi\sin^2 2\varphi}$.

406.Į rutulį, kurio spindulys R, įbrėžtas kūgis. Raskite kūgio tūrį, jei kūgio ašinio pjūvio kampas prie viršūnės lygus α. **Atsakymas.** $\frac{2}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

407.Taisyklingos trikampės piramidės viršūnės plokštieji kampai statūs, o pagrindo briaunos ilgis lygus a. Raskite įbrėžto rutulio tūrį. **Atsakymas.** $\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^3\sqrt{2}}{568}\pi a^3$.

408.Į rutulį, kurio spindulys R, įbrėžtas ritinys. Kokia turi būti ritinio aukštinė ir pagrindo spindulys, kad jo tūris būtų didžiausias ? **Atsakymas.** $R\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{6}}{2}R$.

409.Apibrėžto apie pusrutulį, kurio spindulys R, kūgio pagrindo centras sutampa su rutulio centru. Kokia turi būti kūgio aukštinė, kad jo tūris būtų mažiausiais ?

Atsakymas. $R\sqrt{3}$.

410.Apie rutulį, kurio spindulys R, apibrėžtas kūgis. Kokia turi būti kūgio aukštinė H, kad kūgio tūris būtų mažiausiais ? **Atsakymas.** 4R .

411.Į pusrutulį, kurio spindulys 4 cm ,įbrėžtas cilindras. Cilindro pagrindas sutampa su plokštuma, ribojančia pusrutulį. Koks turi būti cilindro pagrindo spindulys, kad cilindro tūris būtų didžiausias ? **Atsakymas.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

412.Į pusrutulį, kurio spindulys 4 cm, įbrėžtas cilindras. Cilindro pagrindas sutampa su plokštuma, ribojančią pusrutulį. Kokia turi būti cilindro aukštinė, kad jo šoninio paviršiaus plotas būtų didžiausias? **Atsakymas.** $2\sqrt{2}$.

413.Apie ritinį, kurio pagrindo spindulys r, aukštinė h, apibrėžtas mažiausio tūrio statusis skritulinis kūgis taip, kad jų pagrindai yra vienoje plokštumoje. Apskaičiuokite kūgio aukštinę. **Atsakymas.** 3 h .

414.Apie pusrutulį, kurio spindulys r, apibrėžtas mažiausio tūrio kūgis taip, kad kūgio pagrindo centras sutampa su rutulio centru. Rasti kūgio aukštinę.

Atsakymas. $r\sqrt{3}$.

II. NATŪRALIŲJŲ SKAIČIŲ NUO 10 IKI 99 KVADRATŲ LENTELĖ

DEŠIM-TYS	VIENETAI									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

III. ILGIO MATAI

	μ	mm	cm	dm	m	km	Pavadinimas
μ	1	0,01	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-9}	mikronas
mm	1000	1	0,1	0,01	0,001	10^{-6}	milimetras
cm	10^4	10	1	0,1	0,01	10^{-5}	centimetras
dm	10^5	100	10	1	0,1	10^{-4}	decimetras
m	10^6	1000	100	10	1	0,001	metras
km	10^9	10^6	10^5	10^4	1000	1	kilometras

IV. PLOTO MATAI

	mm^2	cm^2	dm^2	m^2	*a*	*ha*	km^2	Pavadinimas
mm^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}	kvadratinis metras
cm^2	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	kvadratinis centimetras
dm^2	10^4	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	kvadratinis decimetras
m^2	10^6	10^4	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	kvadratinis metras
a	10^8	10^6	10^4	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}	aras
ha	10^{10}	10^8	10^6	10^4	10^2	1	10^{-2}	hektaras
km^2	10^{12}	10^{10}	10^8	10^6	10^4	10^2	1	kvadratinis kilometras

V. TŪRIO IR TALPOS MATAI

	cm^3 ml	dm^3 l	m^3	Pavadinimas
cm^3 ml	1	0,001	10^{-6}	kubinis centimetras mililitras
dm^3 l	1000	1	0,001	kubinis decimetras litras
m^3	10^6	1000	1	kubinis metras

VI. KAI KURIE DAŽNAI PASITAIKANTYS PASTOVŪS DYDŽIAI

$\sqrt{2}=1{,}4142$ $\sqrt{3}=1{,}7321$ $\sqrt{5}=2{,}2361$

$\sqrt{6}=2{,}4495$ $\sqrt{7}=2{,}6458$ $\sqrt{10}=3{,}1623$

$\pi=3{,}1416$ $2\pi=6{,}2832$ $\frac{\pi}{2}=1{,}5708$

$\frac{\pi}{3}=1{,}0472$ $\frac{\pi}{4}=0{,}7854$ $\frac{1}{\pi}=0{,}3183$

$\pi^2=9{,}8696$ $\pi^3=31{,}0063$ $\pi^4=97{,}4091$

$\sqrt{\pi}=1{,}7725$ $\frac{\pi}{180}=0{,}0175$ $\left(\frac{\pi}{180}\right)^2=0{,}0003$

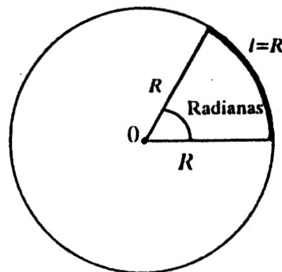
VII. SINUSO, KOSINUSO, TANGENTO IR KOTANGENTO REIKŠMIŲ LENTELĖ

α^0	0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
α_{rad}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

VIII. KAMPO RADIANINIS MATAS. KAMPŲ LAIPSNIŲ PAKEITIMO RADIANAIS IR ATVIRKŠČIAI FORMULĖS

Kampo radianinis matas a yra kampą atitinkančio lanko ilgio ir apskritimo spindulio santykis:

$$a = \frac{l}{R}$$



Kampų radianinio mato vienetas yra **radianas**.

Vieno radiano kampas yra centrinis kampas, besiremiantis į lanką, kurio ilgis lygus apskritimo spinduliui (žr. pav.).

Kampų laipsnių (α^0 laipsnių) pakeitimo radianais (a radianų) formulė:

$$a = \frac{\pi}{180^0}\alpha^0$$

Pavyzdys. Išreikšti radianais 30^0 kampą.

$$a = \frac{\pi}{180^0}\cdot 30^0 = \frac{\pi}{6}.$$

Kai $\alpha^0 = 1^0$ iš laipsnių keitimo radianais formulės turime:

$$1^0 = \frac{\pi}{180^0} rad \approx 0{,}01745 rad$$

Radianų (a radianų) pakeitimo laipsniais (α laipsnių) formulė:

$$\alpha^0 = \frac{a}{\pi}\cdot 180^0$$

Pavyzdys. Išreiškime laipsniais $\frac{\pi}{3}$ rad kampą:

$$\alpha^0 = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi}\cdot 180^0 = \frac{\pi}{3\pi}\cdot 180^0 = \frac{180^0}{3} = 60^0.$$

Kai $a = 1$ rad iš radianų keitimo laipsniais formulės turime:

$$1 rad = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0$$

IX. PAGRINDINĖS TRIGONOMETRIJOS FORMULĖS

1. FORMULĖS, SIEJANČIOS TO PATIES ARGUMENTO TRIGONOMETRINES FUNKCIJAS.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\sin^2\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\cos^2\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

2. DVIGUBO KAMPO FORMULĖS.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

3. LAIPSNINIO ŽEMINIMO FORMULĖS.

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

4. ARGUMENTŲ SUDĖTIES FORMULĖS.

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\cos\beta$; $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;

$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

5. TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ SUDĖTIES FORMULĖS.

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$;

$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

6. TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ SANDAUGA.

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$; $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$;

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$.

7. TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ IŠREIŠKIMAS PUSĖS ARGUMENTO TANGENTU.

$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

8. REDUKCIJOS FORMULĖS.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha$; $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha$;
$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha$; $\sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$; $\cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha$;
$\operatorname{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha$; $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha$;
$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha$; $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha$;
$\sin(2\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha$; $\cos(2\pi\pm\alpha)=\cos\alpha$; $\operatorname{tg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha$;
$\operatorname{ctg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha$.

9. TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ ŽENKLAI KETVIRČIUOSE.

Funkcija	Ketvirtis			
	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tg	+	−	+	−
ctg	+	−	+	−

Vaidotas Mockus
Geometrijos žinynas moksleiviams
Redaktorius A.Malakauskas

SL 843. 1996 02 leidyb. apsk. l 15,6
Užsakymas Nr. 25/A. Tiražas egz. 5.000
Išleido Šiaulių pedagoginis institutas,
P. Višinskio 25, 5400 Šiauliai. Spausdino
Valstybinė "Titnago" spaustuvė,
Vasario 16-osios g. 52, 5400 Šiauliai

Kaina sutartinė